Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

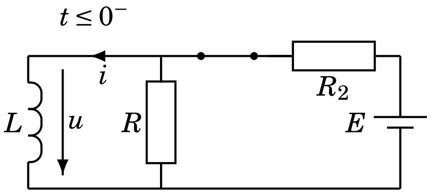
Sähkötekniikka ja elektroniikka

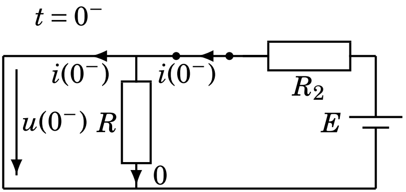
Kimmo Silvonen (X)

23.–28.9.2020

Laskuharjoitus 2

Johdanto



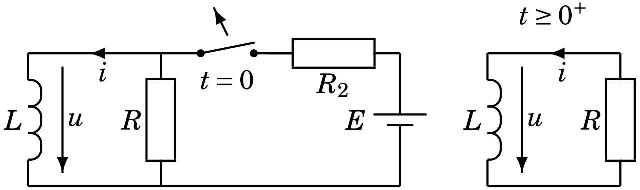


Kelaan varastoituu energiaa, kun sen läpi kulkee virta. Virta kelassa ei katkea heti, vaikka jännitelähde irrotetaan piiristä. Induktanssi on vakiotasavirralla oikosulku $u = u(0^-) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$. Siksi ennen kytkimen avaamista kaikki virta menee kelan läpi. Virta on kuitenkin heti kytkimen avaamisen jälkeen sama kuin ennen avaamista: $i(0^+) = i(0^-)$, koska kelan energiavarasto $w = \frac{1}{2}Li^2$ on verrannollinen virran hetkellisarvoon.

21. Laske kelan virta i ja jännite u ajan funktiona,

kun tasajännitelähde irrotetaan piiristä avaamalla kytkin hetkellä $t = 0$.

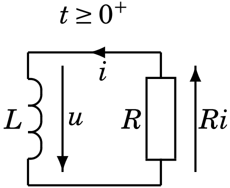
Laske myös kelan virta ja jännite juuri ennen kytkimen avaamista: $i(0^-)$ ja $u(0^-)$ ja heti sen jälkeen: $i(0^+)$ ja $u(0^+)$.
$L = 100$ mH, $R = 1$ kΩ, $R_2 = 10$ Ω, $E = 10$ V.



Kelan alkuvirtaa merkitään kahdella eri tavalla.

$$i(0) = I_{L0} = \frac{E - u(0^-)}{R_2} = 1\,\text{A} = i(0^-) = i(0^+) \qquad (1)$$

Differentiaaliyhtälö



Kun kytkin on avattu ($t \geq 0^+$), tunkee kela virtaansa vastuksen läpi niin kauan kuin energiavarastoa riittää. Virran lauseke määräytyy differentiaaliyhtälön ratkaisuna:

$$\overbrace{L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}}^{u} + Ri(t) = 0 \tag{2}$$

Differentiaaliyhtälössä tuntematon virta tai jännite on yleensä sekä funktiona, että derivoitavana funktiona.

Differentiaaliyhtälö ja yrite

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=0 \qquad \leftarrow i(t)=A\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{3}$$

Vain poikkeustapauksessa differentiaaliyhtälön ratkaisuna voi olla jokin vakiovirta tai vakiojännite. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisut ovat aina tietyntyyppisiä Neperin luvun sisältäviä funktioita (vrt. kaavakokoelma).Tehtäväksi jää tuntemattomien kertoimien A,B ja τ määrittäminen. Nyt $B=0$, mikä näkyy yhtälön muodosta (ei summattavaa vakiotermiä toisin kuin seur. tehtävässä). Sijoitetaan yrite $i=i(t)=A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ yhtälöön:

$$-\frac{1}{\tau}LA\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+RA\mathrm{e}^{-t/\tau}=0 \tag{4}$$

missä L ja A ovat vakiokertoimia ja $-\frac{1}{\tau}$ on sisäfunktion derivaatta (tässä t:n kerroin).

Aikavakio

Kirjain τ on aikavakio, joka kuvaa muutosilmiön nopeutta; se on selvästi lyhyempi kuin muutosilmiön koko kestoaika (joka on teoriassa ääretön).

$$\underbrace{\left(-\frac{L}{\tau}+R\right)}_{0} A\mathrm{e}^{-t/\tau}=0 \Rightarrow \tau=\frac{L}{R}=0{,}1\,\mathrm{ms} \tag{5}$$

Kerroin A sAAdAAn AinA AlkuArvostA, joka voidaan päätellä kytkentäkaavion perusteella ($u(0^-)=0$). Nyt siis

$$i(0)=I_{\mathrm{L}0}=\frac{E-\overbrace{u(0^-)}^{0}}{R_2}=1\,\mathrm{A}=i(0^-)=i(0^+) \tag{6}$$

$$i(0)=A\underbrace{\mathrm{e}^{-0/\tau}}_{1}=A \Rightarrow A=\frac{E}{R_2} \tag{7}$$

Kootaan loput tulokset yhteen

Katso myös ed. sivu!

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t} \tag{8}$$

$$i(t) = \frac{E}{R_2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \mathrm{e}^{-t/0{,}1\,\mathrm{ms}}\,\mathrm{A} \tag{9}$$

$$u(t) = -Ri(t) = -1000 \cdot \mathrm{e}^{-t/0{,}1\,\mathrm{ms}}\,\mathrm{V} \tag{10}$$

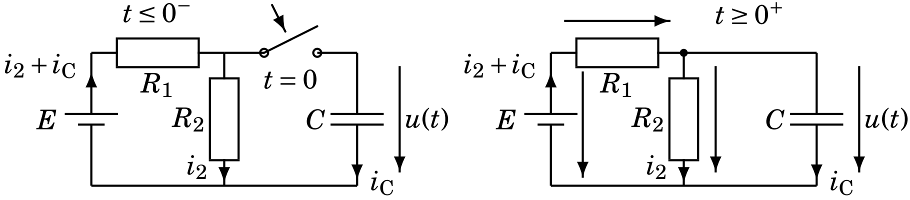
$$u(0^+) = -Ri(0^+) = -1000\,\mathrm{V} \tag{11}$$

Kela pyrkii jatkamaan virran kulkua, vaikka lähde on irrotettu piiristä. Tätä ilmiötä hyödynnetään mm. tietokoneiden hakkuriteholähteissä. Joskus kelan energiavarasto saattaa muodostaa haitallisen korkean jännitepiikin esimerkiksi kytkintä käännettäessä. Varsinkin puolijohdekomponentit ovat herkkiä rikkoontumaan, ellei e.m. jännitepiikin syntyä estetä suojapiirillä (esim. vastus tai diodi kelan rinnalla).

22. Laske jännite u ajan funktiona,

kun kondensaattori liitetään piiriin hetkellä $t = 0$. Paras tärppi!

$C = 100\ \mu$F, $R_1 = R_2 = 10$ kΩ, $U_{C0} = -2$ V, $E = 10$ V (tasajännite).



Piirin differentiaaliyhtälö kytkimen sulkemisen jälkeen:

$$-E + R_1 \underbrace{\left(\frac{u}{R_2} + C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right)}_{i_1 = i_2 + i_C} + u = 0 \tag{12}$$

Pitempi yrite, jossa on $B \neq 0$

Koska yhtälössä on summattava vakiotermi $-E$, tarvitaan pitempää yritettä ($B \neq 0$). Voit käyttää pitempää yritettä jopa aina, koska homogeenisen differentiaaliyhtälön mnt-osa menee luonnostaan nollaksi. Koska A voi olla positiivinen tai negatiivinen, voi sen etumerkki olla yritteessä kumpi vain. Virralle ja jännitteelle voidaan tarvittaessa käyttää samanlaista yritettä.

$$u = B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{13}$$

Sijoitetaan yrite piiriyhtälöön:

$$-E + R_1\frac{u}{R_2} + u + R_1 C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{14}$$

$$-E + \frac{R_1 + R_2}{R_2}(B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) - R_1 C\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \tag{15}$$

Munat ja jauhot -menetelmä — differentiaaliyhtälöiden hallitsija

$$-E+\frac{R_1+R_2}{R_2}B+\frac{R_1+R_2}{R_2}A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-R_1C\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=0 \tag{16}$$

Tämän yhtälön on toteuduttava kaikilla t:n arvoilla kytkimen sulkemisen jälkeen. Jos yhtälö toteutuu kaikilla t:n arvoilla, se toteutuu myös umpimähkään valituilla t:n arvoilla.
Jaetaan yhtälö vakio-osaan ($mnt = munat$) ja ajasta riippuvaan osaan ($jht = jauhot$).

$$\underbrace{\left(-E+\frac{R_1+R_2}{R_2}B\right)}_{mnt}+\underbrace{\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}-\frac{R_1C}{\tau}\right)A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{jht}=0 \tag{17}$$

Ratkaistaan yhdestä yhtälöstä kaksi tuntematonta

Valitaan kokeeksi $t = \infty$ (tämähän on yksi *kaikista* t:n arvoista); tällöin $\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0$. Jotta yhtälö toteutuisi, vakio-osan täytyy olla nolla. Jos kerran vakio-osa on aina nolla, täytyy lopulta myös ajasta riippuvan osan olla nolla muillakin t:n arvoilla kuin äärettömällä:

$$mnt = 0 \Rightarrow -E + \frac{R_1 + R_2}{R_2} B = 0 \tag{18}$$

$$\Rightarrow B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{E}{2} = 5\,\mathrm{V} \tag{19}$$

$$jht = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} A - R_1 C \frac{A}{\tau} \right)}_{0} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \tag{20}$$

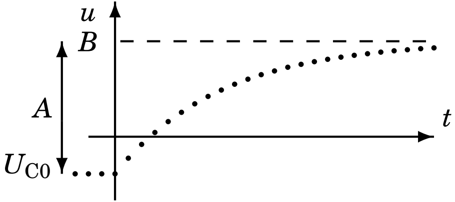
$$\Rightarrow \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = R_{12} C = 0{,}5\,\mathrm{s} \tag{21}$$

(22)

Lasketaan lopuksi A alkuarvosta

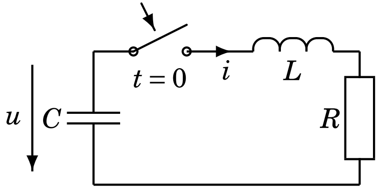
$$U_{C0} = u(0) = B + A\mathrm{e}^{-0} = B + A \Rightarrow A = U_{C0} - B = -7\,\mathrm{V} \qquad (23)$$

$$u = u(t) = 5 - 7\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{V},\ (t\ \text{sekunteina}) \qquad (24)$$



23. Kuinka suuria ovat kertoimet D ja E?

Kondensaattori on varattu jännitteeseen $U_{C0} = 10$ V. Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$. Piirissä alkaa kulkea virta $i = A\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin\omega t$. Kondensaattorin jännite on muotoa $u = (D\cos\omega t + E\sin\omega t)\mathrm{e}^{-t/\tau}$, kun $t \geq 0$. $A = 1$ A, $C = 40\,000$ μF, $L = 5$ H, $R = 10$ Ω, $\omega = 2\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $\tau = 1$ s.



Johdantoa

Kelan ja kondensaattorin jännite ja virta riippuvat toisistaan differentiaaliyhtälön kautta. Vastuksessa vastaava yhtälö on Ohmin laki. Vain tasavirralla ja jatkuvassa sinimuotoisessa tapauksessa (viikot 1 ja 3–4) ei differentiaaliyhtälöitä tarvita. Koska virran ja jännitteen lausekkeet on tehtävässä annettu, jää ongelmaksi ainoastaan kertoimien lukuarvojen määrääminen. Kerroin D voidaan laskea esim. kondensaattorin alkujännitteen avulla:

$$U_{\mathrm{C0}} = (D\cos 0 + E\sin 0)\mathrm{e}^0 = D \Rightarrow D = 10\,\mathrm{V} \tag{25}$$

$$-u + u_{\mathrm{L}} + u_{\mathrm{R}} = 0 \Rightarrow -u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \tag{26}$$

Lausutaan Kirchhoffin jännitelaissa kelan ja vastuksen jännite virran avulla. Kondensaattorissa tätä ei kannata tehdä, koska konkan jännitteen lauseke annettiin tehtävässä (huom.! U_{C0} on tämän lausekkeen alkuarvo, kun $t = 0$).

Sijoitukset

Sijoitetaan u:n ja i:n lausekkeet kertoimien määrittämiseksi:

$$-\overbrace{(D\cos\omega t + E\sin\omega t)\mathrm{e}^{-t/\tau}}^{u} + \overbrace{LA\left(-\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin\omega t + \mathrm{e}^{-t/\tau}\omega\cos\omega t\right)}^{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} +$$
$$R\overbrace{A\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin\omega t}^{i} = 0 \qquad (27)$$

Kerrotaan yhtälön molemmat puolet $\mathrm{e}^{t/\tau}$:lla, jotta lauseke siistiytyy:

$$-(D\cos\omega t + E\sin\omega t) + LA\left(-\frac{1}{\tau}\sin\omega t + \omega\cos\omega t\right) + RA\sin\omega t = 0$$

Olisi myös voitu ottaa $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ yhteiseksi tekijäksi.

Kerätään sinit ja kosinit omiin poteroihinsa

$$\underbrace{(-D+LA\omega)}_{mnt=0}\cos\omega t+\underbrace{\left(RA-E-LA\frac{1}{\tau}\right)}_{jht=0}\sin\omega t=0 \qquad (28)$$

Koska yhtälön tulee toteutua kaikilla (positiivisilla) t:n arvoilla, on kosinin ja sinin kertoimien ("*munat* ja *jauhot*") oltava nollia toisistaan riippumatta (munat eivät voi muuttua jauhoiksi tai kumota niitä):

$$\underbrace{(-D+10)}_{D=10\,\mathrm{V}}\cos\omega t+\underbrace{(10-E-5)}_{E=5\,\mathrm{V}}\sin\omega t=0 \quad \text{kaikilla } t\text{: n arvoilla!}$$

Jos $\sin\omega t$ olisi nolla (siis esim. $t=0$), tulisi kosinin kertoimen olla nolla, koska kosini itse ei tällöin ole nolla. Muilla t:n arvoilla kosinin kerroin on edelleen nolla, koska se ei riipu ajasta. Tällöin myös sinin kertoimen on oltava nolla, jotta koko lauseke saa arvon nolla t:n arvosta riippumatta.

Johdantoesimerkki vaihtovirtoihin

Edellisten tehtävien derivaattoihin perustuva laskutapa on täysin yleispätevä, joten *periaatteessa* se sopii myös jatkuvan sinimuotoisen virran ja jännitteen käsittelyyn. Muissa vaihtovirtatehtävissä käsitelty osoitinlaskenta on kuitenkin huomattavasti kätevämpää. Tämän johdantoesimerkin tarkoituksena on osoittaa yhteys differentiaaliyhtälöiden ja osoitinlaskennan välille. Yhteys ei tosin ole aivan yksinkertainen. Tämän esimerkin jälkeen ymmärrät kuitenkin paremmin, mistä osoitinlaskennassa oikein on kysymys.

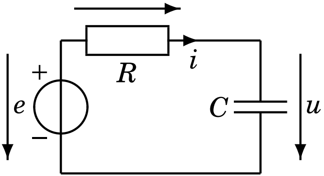
24. Laske kondensaattorin virta i (ajan funktiona)

jännitteen $u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi)$ derivaatan avulla

Selvitä ensin tehollisarvo U ja vaihekulma φ (phi, vakio). Jännitelähde $e = \sqrt{2}E\sin\omega t$, missä $E = 10$ V ja $\omega = 2\pi \cdot 50\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. $R = 10\ \Omega$, $C = \frac{1}{\pi}$ mF.

$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi$

$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi$



$$-e + R\overbrace{i}^{C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}} + u = 0 \leftarrow u = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \varphi) \qquad (29)$$

Laske tehtävä ensi viikolla helpommin kompleksiluvuilla!