



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

Sähkötekniikka ja elektroniikka

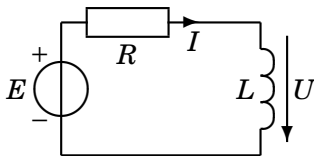
Kimmo Silvonen (X)

30.9.–5.10.2020

Laskuharjoitus 3

Johdanto

Kuvan piirissä on sinimuotoinen jännitelähde E . Laske kelan jännite osoitinlaskennalla (kompleksiluvut). $E = 44\angle 0^\circ$ V, $f = 50$ Hz, $R = 10$ Ω , $L = 18,38$ mH.



$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 44 \sin(\omega t + 0^\circ) \Rightarrow E = 44\angle 0^\circ \quad (1)$$

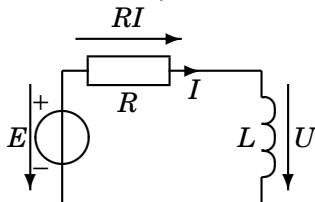
$$\omega = 2\pi f \quad (2)$$

$$Z_L = j\omega L \quad (3)$$

$$U = Z_L I \quad (4)$$

Laske kelan jännite osoitinlaskennalla.

$$E = 44 \angle 0^\circ \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}, R = 10 \ \Omega, L = 18,38 \text{ mH}.$$



Turhia välivaiheita:

$$-E + RI + U = 0 \quad (5)$$

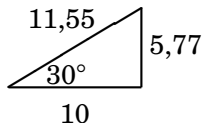
$$-E + RI + Z_L I = 0 \quad (6)$$

(7)

Kirchhoffin jännitelaki:

$$-E + RI + j\omega LI = 0 \quad (8)$$

Ratkaisu ja lukuarvot



$$-E + RI + j\omega LI = 0 \quad (9)$$

$$(R + j\omega L)I = E \quad (10)$$

$$I = \frac{E}{R + j\omega L} \quad (11)$$

$$I = \frac{44}{10 + j5,77} \quad (12)$$

Jakolasku kulmamuodossa:

$$I = \frac{44 \angle 0^\circ}{11,55 \angle +30^\circ} = 3,81 \angle -30^\circ \quad (13)$$

$$(14)$$

Jännite

$$I = \frac{44}{10 + j5,77} \quad (15)$$

$$U = j\omega L \cdot I = \frac{j5,77 \cdot 44}{10 + j5,77} = \frac{0 + j5,77 \cdot 44}{10 + j5,77} \quad (16)$$

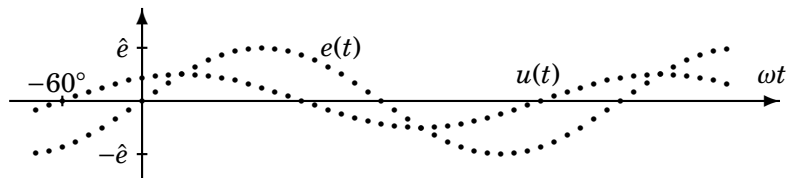
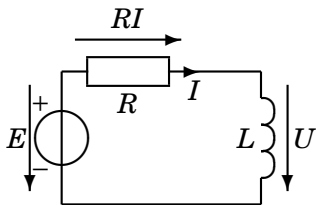
Jakolasku kulmamuodossa:

$$U = \frac{5,77 \cdot 44 \angle 90^\circ}{11,55 \angle 30^\circ} = 22 \angle 60^\circ \text{ V} \quad (17)$$

$$(18)$$

Jännite on siis 22 voltia kulmassa $\angle 60^\circ$ ja mittari näyttäisi 22 V, virtamittari 3,81 A.

Vaihe-erot



Varma koetehtävä: 32. Laske virta I .

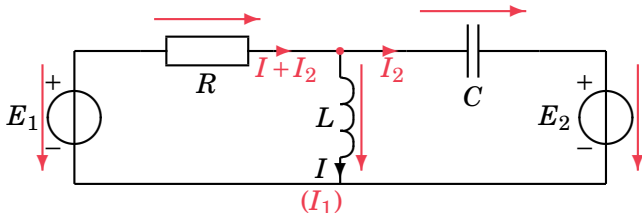
Passiivisiin (RLC) virrat (I_1 ja I_2); virtojen lukumäärä = ikkunoiden määrä

Piilevästi helpot lukuarvot:

$$E_1 = 10 \angle 90^\circ \text{ V}, E_2 = 5 \angle 0^\circ \text{ V} = 5 \text{ V},$$

$$R = 10 \ \Omega, L = 25 \text{ mH}, C = 500 \ \mu\text{F},$$

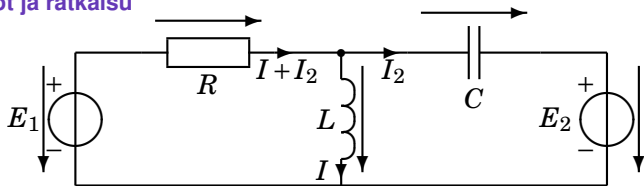
$$f = 200/\pi \text{ Hz}, \omega = 2\pi f$$



Lisätään jännitenuolet.

Yhtälöt

Lukuarvot ja ratkaisu



$$-E_1 + R(I + I_2) + j\omega LI = 0 \Rightarrow -10j + 10(I + I_2) + j10I = 0 \quad (19)$$

$$-j + (I + I_2) + jI = 0 \Rightarrow I_2 = j - I - jI \quad (20)$$

$$-j\omega LI + \underbrace{\frac{1}{j\omega C}}_{-j\frac{1}{\omega C} = -j5} I_2 + E_2 = 0 \Rightarrow -j10I - j5I_2 + 5 = 0 \quad (21)$$

$$\Rightarrow -j10I - j5 \underbrace{(j - I - jI)}_{I_2} + 5 = 0 \quad (22)$$

Tulos

Mieluiten kulmamuodossa, mutta summamuotokin hyväksytään

$$-j10I - j5(j - I - jI) + 5 = 0 \quad (23)$$

$$I = \frac{j5j - 5}{-j10 + j5 + j5j} = \frac{-10}{-j5 - 5} \quad (24)$$

Jakolasku kulmamuodossa:

$$I = \frac{10}{5 + j5} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5\sqrt{2} \angle +45^\circ} = \frac{10}{5\sqrt{2}} \angle 0^\circ - 45^\circ = \underbrace{\frac{1,41}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ}_{(1-j)} \text{ A} \quad (25)$$

Virta on siis 1,41 ampeeria kulmassa -45° .

Mittari näyttäisi tehollisarvoa 1,41 A.

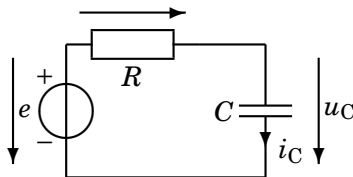
Laske virran ja jännitteen hetkellisarvot

hetkellä $t = 5$ ms. Opit ymmärtämään kompleksilukujen yhteyden hetkellisarvoihin

$$E = 10 \angle 15^\circ \text{ V eli } e(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ V, } f = 50 \text{ Hz,}$$

$$\omega = 2\pi f = 100\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$R = 2 \Omega, C = 5/\pi \text{ mF.}$$



Jos lasket $e(5 \text{ ms})$, saat e :n arvon hetkellä 5 ms, mutta et voi käyttää tietoa mihinkään! Lasketaan ensin jännite ja virta kompleksiluvuilla.

Kirchhoffin jännitelaki:

$$-E + RI_C + \frac{1}{j\omega C} I_C = 0 \Rightarrow I_C = \frac{E}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (26)$$

Kerrossiivous

Lavennus nimittäjän nimittäjällä; välivaihe helpottaa lukuarvojen käsittelyä(?)

Lasketaan ensin tulokset kulmamuodossa:

$$I_C = \frac{E}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CE}{j\omega CR + 1} = \frac{0,5 \angle 90^\circ 10 \angle 15^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ \quad (27)$$

$$U_C = \frac{1}{j\omega C} I_C = \frac{E}{j\omega CR + 1} = \frac{10 \angle 15^\circ}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -30^\circ \quad (28)$$

Ajan funktiona

Muunnetaan tulokset ajan funktioiksi kompleksisen virran ja jännitteen määrittelykaavalla (vrt. tehtävän E ja $e(t)$):

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot 10 \sin(\omega t + 15^\circ) \Leftarrow E = 10 \angle 15^\circ \quad (29)$$

$$i_C(t) = \sqrt{2} |I_C| \sin(\omega t + 60^\circ) \Leftarrow I_C = 5/\sqrt{2} \angle 60^\circ \quad (30)$$

$$u_C(t) = \sqrt{2} |U_C| \sin(\omega t - 30^\circ) \Leftarrow U_C = 10/\sqrt{2} \angle -30^\circ \quad (31)$$

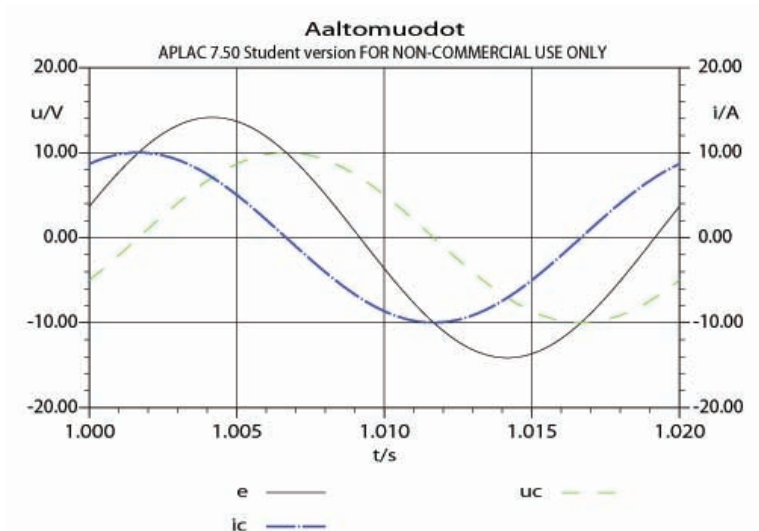
Itseisarvomerkkit tarkoittavat siis kompleksiluvun pituutta (tehollisarvo). Hetkellisarvon laskemiseksi sijoitetaan aika $t = 5$ ms. Huomaa, että ωt antaa kulman radiaaneina, ellet ole varuillasi (saat käyttää radiaaneja, mutta tarkista, ettei laskimesi tarjoa graadeja):

$$\omega t = 100\pi \cdot 0,005 = 0,5 \cdot 180^\circ = 90^\circ \quad (32)$$

$$i_C(5 \text{ ms}) = 5 \sin(\omega t + 60^\circ) = 5 \sin 150^\circ = 2,5 \text{ A} \quad (33)$$

$$u_C(5 \text{ ms}) = 10 \sin(\omega t - 30^\circ) = 10 \sin 60^\circ = 8,66 \text{ V} \quad (34)$$

Vaihe-erot

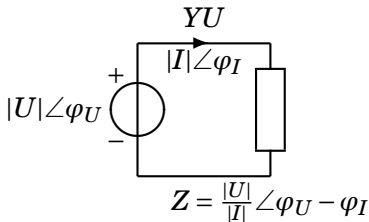
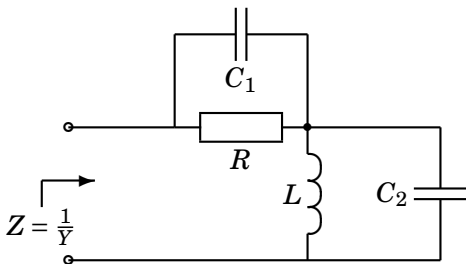


Laske oheisen piirin impedanssi

Mikä on impedanssin käytännön merkitys?

Ilmoita tulos kulmamuodossa. Paljonko on admittanssi summamuodossa? Tämä on hyvä kompleksiaritmetiikan harjoitus helppojen lukuarvojen takia.

$$R = 2 \Omega, L = 1 \text{ mH}, C_1 = 250 \mu\text{F}, C_2 = 500 \mu\text{F}, \omega = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$



Impedanssien rinnan ja sarjaan kykentä

Tehtävän voi ratkaista käyttämällä joko Z :aa tai Y :tä tai molempia. Jaetaan piiri kahteen lohkoon Z_1 ja Z_2 , jotka molemmat koostuvat osaimpedanssien rinnankytkennästä. (Vastusten) rinnankytkennän kaavan ja osaimpedanssien lausekkeet voit katsoa kaavakokoelmasta. Seuraavana välivaiheena kannattaa tehdä ns. kerrossiivous, siivotaan yläkerta ja alakerta (osoittaja ja nimittäjä) laventamalla lauseke ala- tai yläkerran alakerralla ($j\omega C_i$) (laventaja on merkitty Z_i -lausekkeiden vasempaan yläkulmaan).

$$Z_1 = \frac{j\omega C_1) R \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R}{j\omega C_1 R + 1} \quad (35)$$

$$Z_2 = \frac{j\omega C_2) j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{j\omega L}{-\omega^2 LC_2 + 1} \quad (36)$$

Jakolasku

Kulmam muodossa (yleissuositus) tai summamuodossa (jos helpot lukuarvot)

$$Z_1 = \frac{R}{j\omega C_1 R + 1} = \frac{2}{j+1} = \frac{2\angle 0^\circ}{\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2}}}_{1-j} \angle (0^\circ - 45^\circ) \quad (37)$$

$$Z_1 = \frac{R}{j\omega C_1 R + 1} = \frac{2}{j+1} = \frac{2(1-j)}{2} = 1-j \quad (38)$$

$$Z_2 = \frac{j\omega L}{-\omega^2 LC_2 + 1} = \frac{j2}{-2+1} = -2j \quad (39)$$

Huom! Reaalilukujakaja toimii kuin *reaalilukujakaja*; reaaliluvut ovat aina nollakulmassa!

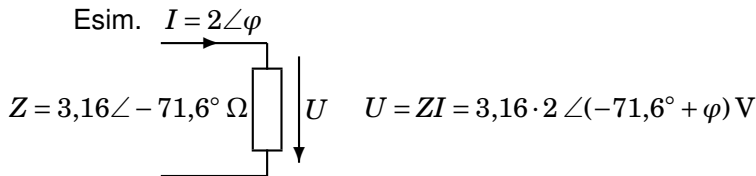
Tulokset

Sarjaan kytketyt impedanssilohkot yhdistetään summaamalla:

$$Z = Z_1 + Z_2 = 1 - j - 2j = 1 - 3j = 3,16 \angle -71,6^\circ \Omega \quad (40)$$

Admittanssi Y on aina impedanssin Z käänteisluku:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j3} = \frac{1 + j3}{1^2 + 3^2} = (0,1 + j0,3) \text{ S} \quad (41)$$



$|Z| = 3,16 \Omega$ kertoo siis jännitteen ja virran tehollisarvojen suhteen ($\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}$) ja kulma $\varphi = -71,6^\circ$ U :n ja I :n vaihe-eron. Impedanssin kulma on sama kuin kompleksisen tehon kulma (ensi viikko).