Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Sähkötekniikka ja elektroniikka

Kimmo Silvonen (X)

23.9.2020

Passiiviset peruskomponentit

Luento 23.9.2020

- Kondensaattori – kapasitanssi C; yhtälö $i =$f(u) perustuu varauksen häviämättömyyden lakiin (virran määritelmä)
- Kela – induktanssi L; yhtälö $u =$f(i) perustuu Faradayn induktiolakiin (yksi jännitteen määritelmistä)
- Muutosilmiöt eli transienttianalyysi
- Diracin deltafunktio
- Eksponentiaaliset muutosilmiöt RC, RL
- Vaimeneva värähtely RLC, RCC, RLL
- Laplace-muunnos (ei kuulu kurssiin)
- Teoriaa laajasti: *Elektroniikka ja sähkötekniikka*, 2018

Kela ja induktanssi L, Faradayn induktiolaki

Varastoi energiaa, mutta ei kuluta tehoa, jos käämissä ei ole resistanssia

$$\psi = Li = N\phi \qquad w_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}Li^2$$

$$u = u(t) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{vrt. } u = Ri$$

$$i = i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u\,\mathrm{d}t + I_{\mathrm{L0}} \qquad \text{vrt. } i = Gu$$

Induktanssi $[L]$ = H = Vs/A = henry

Käämivuo $[\psi]$ = Vs = Wb = weber

Magneettivuo $[\phi]$ = Vs = Wb

$I_{\mathrm{L0}} = i(0)$ = kelan virta hetkellä $t = 0$, kierrosmäärä N

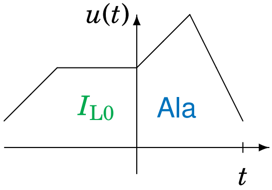
w_{L} = kelaan varastoitunut energia (J)

di- ja dt -jumppaa

$$u = u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u\,\mathrm{d}t = L\mathrm{d}i$$

$$\int_{-\infty}^{t} u\,\mathrm{d}t = L\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}i$$



$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u\,\mathrm{d}t = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0} u\,\mathrm{d}t + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}t$$

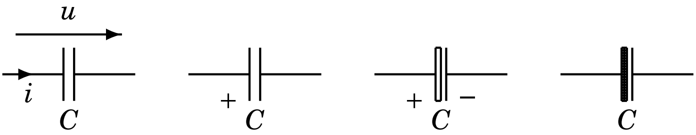
$$i = i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}t + I_{\mathrm{L0}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i) = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}t\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{vakio})$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{L}u + 0$$

Kondensaattori ja kapasitanssi C, Sähkövirran määritelmä

Ei ole vastusta; varastoi energiaa, mutta ei kuluta tehoa



$$q = Cu \qquad w_\mathrm{C} = \frac{1}{2} C u^2$$

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Cu)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \text{vrt. } i = Gu$$

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t + U_\mathrm{C0} \qquad \text{vrt. } u = Ri$$

Kapasitanssi $[C]$ = F = As/V = faradi

Varaus $[q]$ = As = C = coulombi

$U_\mathrm{C0} = u(0)$ = kondensaattorin eli konkan jännite hetkellä $t = 0$

w_C = kondensaattoriin varautunut energia [J]

Jännite ja virta kelassa ja konkassa, yhteenveto

Varastoitunut hetkellinen energia $w = w(t)$

$$w_\mathrm{L} = \frac{1}{2} L i^2 \qquad w_\mathrm{C} = \frac{1}{2} C u^2$$

$$u_\mathrm{L} = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \qquad i_\mathrm{L}(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u \, \mathrm{d}t + i_\mathrm{L}(0)$$

$$i_\mathrm{C} = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad u_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i \, \mathrm{d}t + u_\mathrm{C}(0)$$

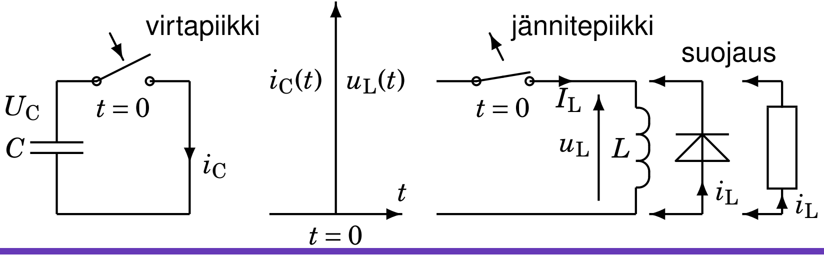
Diracin deltafunktio $\delta(t)$, nopea muutosilmiö

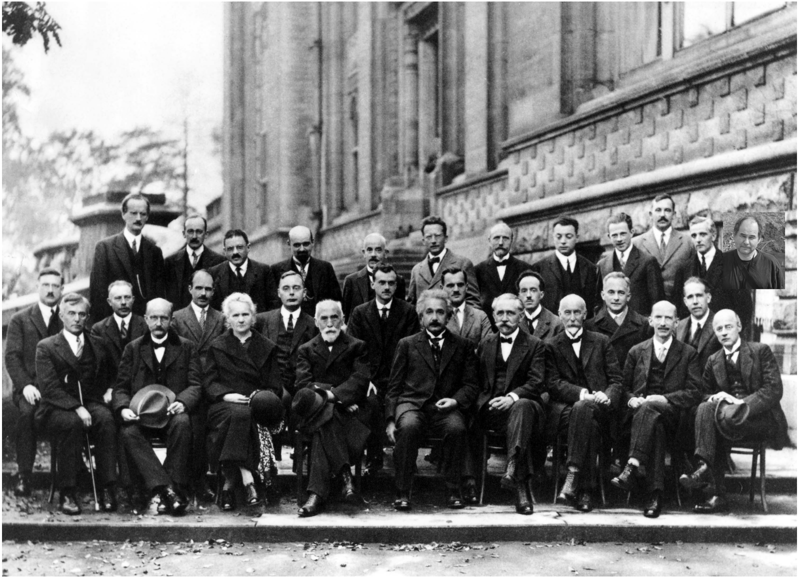
Jännite- tai virtapiikki, korkeus ∞, leveys nolla (vrt. Laplace-muunnos)

Kelan virta tai kondensaattorin jännite katkaistaan brutaalisti:

$$u_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \approx L\frac{0 - I_\mathrm{L}}{0} \approx -\infty \qquad |u_\mathrm{L}| = L\delta(t)$$

$$i_\mathrm{C} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \approx C\frac{0 - U_\mathrm{C}}{0} \approx -\infty \qquad |i_\mathrm{C}| = C\delta(t)$$





Ylärivi: 6. vasemmalta Schrödinger, 8. Pauli, 9. Heisenberg, 12. X
Keskirivi: 5. Dirac (keskimm.), 6. Compton, 7. de Broglie, 9. Bohr
Alarivi: 2. Planck, 3. MC (2xNP), 4. Lorentz, 5. mc^2 [Solvay 1927]

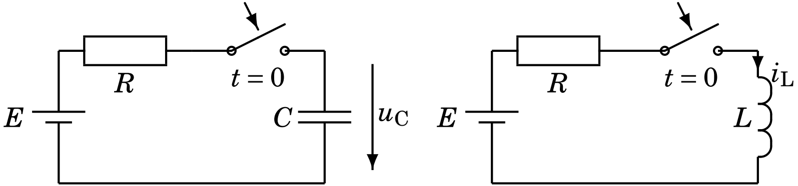
Muutosilmiöt *Circuit Transients*

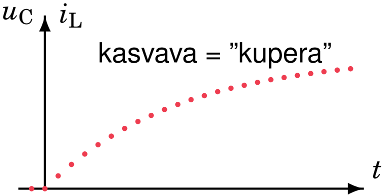
Transienttianalyysi

- L ja C varastoivat energiaa
- Energiavarastot verrannollisia virtaan (L) ja jännitteeseen (C)
- Varastot eivät voi muuttua äkkijyrkästi: i_{L} ja u_{C} jatkuvia
- Muutosilmiöt ovat eksponenttifunktioita
- RC ja RL ⇒ 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt
- LC, RLC, RCC ja RLL ⇒ 2. kertaluvun d. y.

Jännitelähteen kytkeminen *Switching On*

Jännite u_C ja virta i_L muuttuvat eksponenttikäyrää pitkin

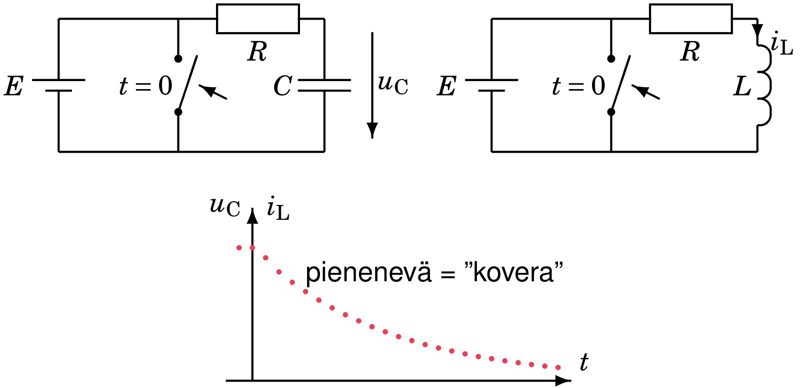




Jännitteen katkaisu *Switching Off*

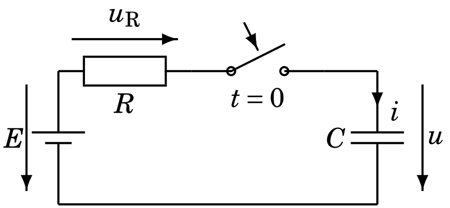
Lähde nollataan. Huom. todellista jännitelähdettä ei saa oikosulkea!

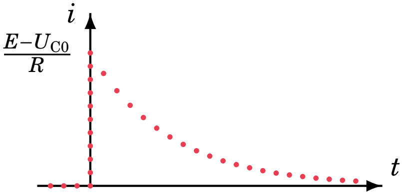
toteaa nimimerkki ”Coke musta on!”

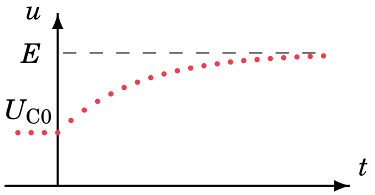


Kondensaattorin lataaminen *Charging the C*

Alkujännitteestä U_{C0} alkaen. Tulos on johdettu tuonnempana.





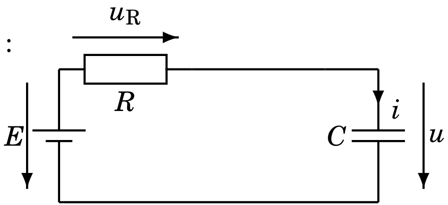


$$u(t \geq 0) = E - (E - U_{C0})e^{-t/(RC)}$$

Differentiaaliyhtälö *Differential Equation*

Yrite on yhtälön tunnettu ratkaisu, jonka vakioita ei vielä tunneta.

$t \geq 0:$



$$-E + Ri + u = 0 \qquad \leftarrow i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\underbrace{E = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u}_{\text{differentiaaliyhtalo}} \qquad \leftarrow \underbrace{u(t) = B + A\mathrm{e}^{-t/\tau}}_{\text{yrite}}$$

$$\text{tai} \qquad E = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}t + u(0)$$

Vakioiden määrittäminen *Coefficients*

Sijoitetaan yrite alkuperäiseen yhtälöön

$$E = RC \underbrace{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}_{-\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}} + \underbrace{u}_{B+A\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

$$\underbrace{E}_{mnt} + \underbrace{RC\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}}_{jht} = \underbrace{B}_{mnt} + \underbrace{A\mathrm{e}^{-t/\tau}}_{jht}$$

”Munat ja jauhot”-menetelmä (mnt, jht): yhtälön on oltava voimassa kaikilla t:n arvoilla; jauhoilla ei voi kompensoida munia!

$$B = E \qquad \tau = RC$$

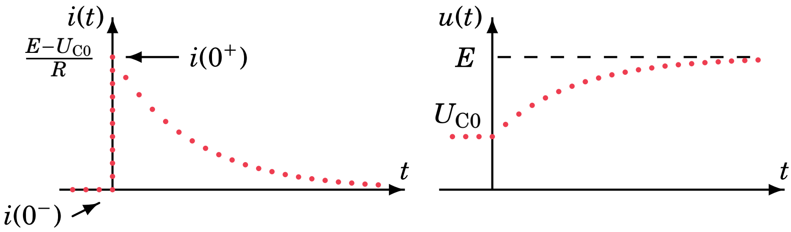
A saadaan Alkuehdosta ($t = 0$):

$$u(0) = U_{\mathrm{C0}} = B + A\mathrm{e}^{-0/\tau} = B + A \Rightarrow A = U_{\mathrm{C0}} - B$$

Raja-arvot *Limit Values*

Nollaa lähestytään miinus- tai pluspuolelta

Samanlaista merkintää käytetään matematiikassa.



$$i(0^-) = 0 \qquad i(0^+) = \frac{E - U_{C0}}{R}$$

$$u(0^-) = u(0^+) = u(0) = U_{C0}$$

Yleinen esitysmuoto *General Form*

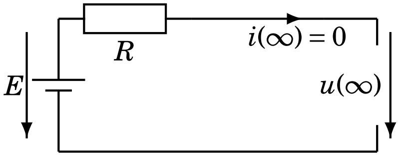
Ei tarvita differentiaaliyhtälöä — ainoastaan alku- ja loppuarvot!

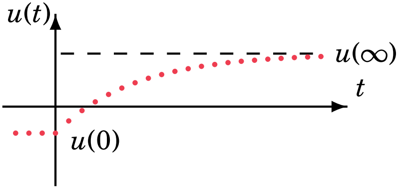
Silmäile tätä kertausvaiheessa!

$$u(\infty) = B + A\mathrm{e}^{-\infty/\tau} = B + 0 = B$$

$$u(0) = B + A\mathrm{e}^{-0/\tau} = B + A$$

$$u(t) = \underbrace{u(\infty)}_{B} + \underbrace{[u(0) - u(\infty)]}_{A}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

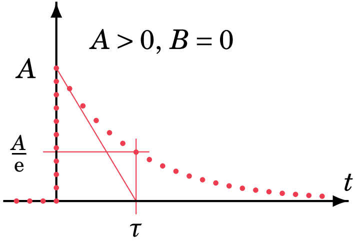


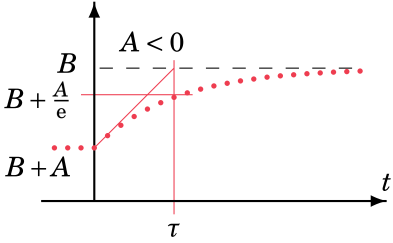


Aikavakio *Time Constant*

Määrittäminen graafisesti tai matemaattisesti on triviaalia

Silmäile tätä kertausvaiheessa!



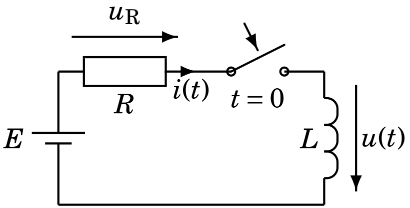


Vino viiva on käyrän tangentti

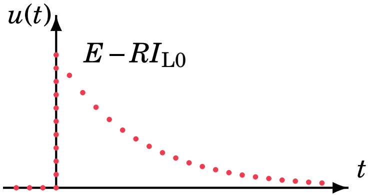
$$\frac{1}{e} \approx 0{,}37 \qquad 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$$

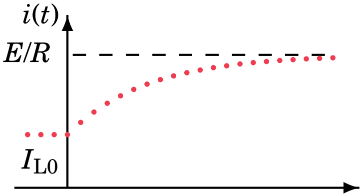
Induktanssin kytkeminen piiriin *Switching On*

eli "energisointi", vrt. kondensaattorin lataaminen



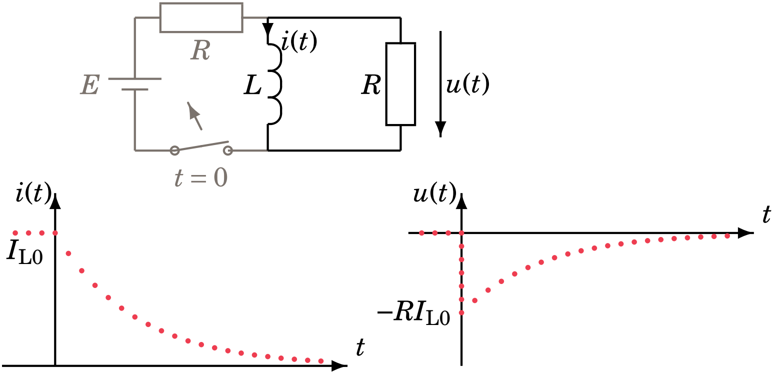
$$E = u_\mathrm{R} + u = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$





Induktanssin tyhjentäminen *Switching Off*

Aluksi E:n tasavirta menee kokonaan vastuksettoman kelan läpi



L:n ja C:n muutosilmiöt ovat matemaattisesti samanlaisia, jos u:t ja i:t vaihdetaan päikseen.

RC- ja RL-piirit, yhteenvetoa

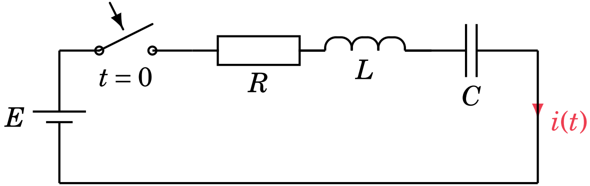
Kelan TAI konkan muuttuva virta ja jännite

Tyypillisiä tapauksia, silmäile tätä kertausvaiheessa – älä ennen!

i_L tai u_C	$u_\mathrm{L} = L\,\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t}$ tai $i_\mathrm{C} = C\,\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$
Vakio (d.c.)	0
Lineaarisesti kasvava	positiivinen vakio
Lineaarisesti pienenevä	negatiivinen vakio
Kasvava eksponenttikäyrä	pienenevä eksponenttikäyrä
Pienenevä eksponenttikäyrä	kasvava eksponenttikäyrä

LC- ja RLC-piirit: kela JA konkka

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö! Alinna eräs ratkaisu.



$$E = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + U_{\mathrm{C0}}$$

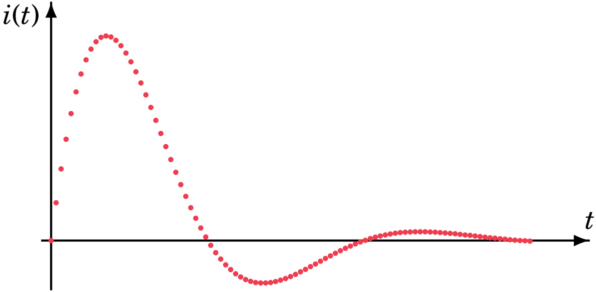
$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} + 0 \qquad \text{(derivoitu)}$$

$$\left[\frac{E}{s} = RI(s) + L\,sI(s) + \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s} + \frac{U_{\mathrm{C0}}}{s}\right] \quad \text{(Laplace} - \text{muunnettu)}$$

$$i(t) = A\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)$$

Eksponentiaalisesti vaimeneva sini

Eksponentiaalinen verhokäyrä



$$i(t) = A\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)$$

Vrt. Tacoma Narrows Bridge Seattlen lähellä; sillan värähtelyä (Youtube, 4 min. 13 s.) on simuloitu RLC-piirillä. Volgogradissa eräs silta suljettiin 22.5.2010 vastaavan värähtelyn takia.

Osoitinlaskenta *Phasor Calculus*

Vaihtovirrat ja kompleksiluvut

Käsitellään kahdella seuraavalla viikolla.

Esitietoja ei vaadita.

Yksi kurssin pääaiheista, muista tulla paikalle!

Ota laskin mukaan (tavallinen funktiolaskin on hyvä)!

Opit rakastetun kompleksiaritmetiikan jo ennen kuin olet läpäissyt kurssin, esim.:

$$\sqrt{2\,\mathrm{j}} = \sqrt{2\sqrt{-1}} = 1 + \sqrt{-1} = 1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}\angle 45^\circ = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2\angle 90^\circ}$$

Korota mikä tahansa edellisistä toiseen, saat "juurenalusen":

$$\sqrt{2}\angle 45^\circ \cdot \sqrt{2}\angle 45^\circ = 2\angle 90^\circ$$