



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan
korkeakoulu

Sähkötekniikka ja elektroniikka

Kimmo Silvonen (X)

30.9.2020

Vaihtovirta ja osoitinlaskenta

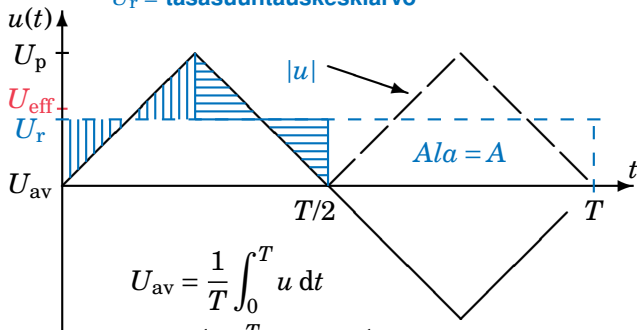
Luento 30.9.2020

- ▶ Sinimuotoinen virta ja jännite
- ▶ Tehollisarvo, huippuarvo, vaihekulma
- ▶ Ajan vai taajuuden funktiona?
- ▶ Viime viikon kytkentäilmiöt ajan funktioita
- ▶ Osoitinlaskenta vain jatkuvassa tilassa!
- ▶ Kompleksiluvut, summamuoto vs. kulmamuoto
- ▶ Impedanssi ja admittanssi, yleistetty Ohmin laki
- ▶ Opit hienon laskumenetelmän ja tulevan koetehtävän!
- ▶ Lisätietoa: Elektroniikka ja sähkötekniikka

Keskiarvo, tehollisarvo, Average or Effective

r = rectified

U_r = tasasuuntauskeskiarvo



$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt$$

$$U_r = \frac{1}{T} \int_0^T |u| \, dt = \frac{1}{T} A$$

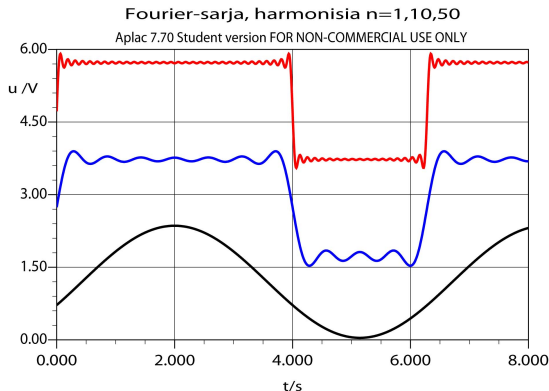
$$U = U_{eff} = U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, dt}$$

root mean square

Jaksollisen aaltomuodon Fourier-sarja

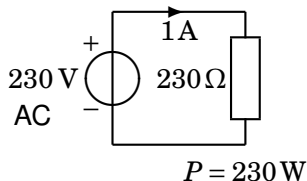
koostuu sinimuotoisista osista; kuvassa $n_{\text{MAX}} = 1, 10, 50$, nolataso vaihtelee

$$u(t) = U_{\text{DC}} + U \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin 4n\omega}{n\pi} \cos n\omega t + \frac{(1 - \cos 4n\omega)}{n\pi} \sin n\omega t \right]$$

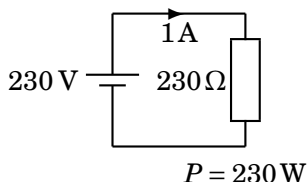


Verkköjännite, Mains AC Voltage

Tehollisarvon fyysikaalinen merkitys



vrt. DC



$$U = 230 \text{ V} = U_{\text{eff}}$$

$$\hat{u} = 325 \text{ V}$$

$$U_{\text{av}} = 0 \text{ V}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

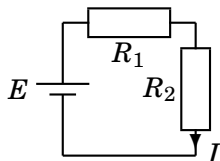
$$u_{\text{pp}} = 650 \text{ V}$$

$$U_{\text{r}} = 207 \text{ V}$$

$$T = 20 \text{ ms}$$

Vertailutesti: DC vs. AC, Introduction

Voit oppia asian ytimen jo tästä, selitykset tuonnempana!



$$E = 10 \text{ V}$$

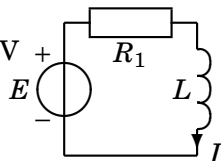
$$R_1 = 4 \Omega$$

$$R_2 = 2 \Omega$$

$$E = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$R_1 = 4 \Omega$$

$$\omega L = 2 \Omega$$



$$-E + R_1 I + R_2 I = 0$$

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$I = \frac{10}{6}$$

$$= 1,67$$

$$-E + R_1 I + Z I = 0$$

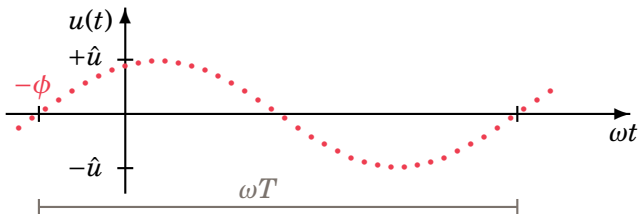
$$I = \frac{E}{R_1 + Z}$$

$$I = \frac{10}{4 + j2} = \frac{10}{\sqrt{20} \angle 26,6^\circ}$$

$$= \sqrt{5} \angle -26,6^\circ$$

Siniaalto

AC (a.c.)



$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad U_{\text{av}} = 0 \quad U_{\text{r}} = \frac{2\hat{u}}{\pi} \quad U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

ω = kulmataajuus (rad/s = 1/s)

T = jaksonaika (s)

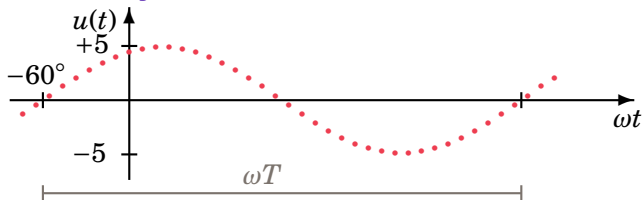
ϕ = (nolla)vaihekulma ($^{\circ}$)

\hat{u} = huippuarvo

$u = u(t)$ = hetkellisarvo

$u_{\text{pp}} = 2\hat{u}$ huipusta huippuun (peak-to-peak)

Osoitinlaskenta, jatkuva sini, *Phasor Calculus*



$$u(t) = 5 \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ V} = 5 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ V}$$

$$\underline{U} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle +60^\circ \text{ V} \quad \text{tai} \quad \underline{U} = 5 \angle -30^\circ \text{ V}$$

Tällä kurssilla: **sinimuotoinen tehollisarvon** osoitin

Usein muualla: **kosinimuotoinen huippuarvon** osoitin

- ▶ Pienet kirjaimet \Rightarrow ajan funktioita
- ▶ Isot kirjaimet \Rightarrow jännite ja virta kompleksilukuina
- ▶ Alaviiva \Rightarrow kompleksiluvun tunnus (en käytä)

Kulmamuoto ja summamuoto

Osoitinlaskenta perustuu merkintäsopimukseen: sinifunktio vs. kompleksiluku

- ▶ Eulerin kaavan imaginaariosa:

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \phi) = \text{Im} \left[\hat{i} e^{j(\omega t + \phi)} \right]$$

\Leftrightarrow

$$\underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \angle + \phi = \underbrace{I_R}_{\text{Re}} + j \underbrace{I_X}_{\text{Im}}$$

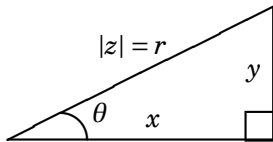
- ▶ Tehollisarvo $|\underline{I}| = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$ ja vaihekulma ϕ
= kulmamuoto (Polar form)
- ▶ Reaali- ja imaginääriosia
= summamuoto (Rectangular form)
- ▶ Sähkötekniikassa imaginääriyksikkö on j

Koordinaatistomuunnos, *Coordinate Transformation*

Tarvitaan käytännön laskuissa

- ▶ Summamuoto (*rectangular*) $x + jy$
- ▶ Kulmamuoto (*polar*) $r\angle\theta$
- ▶ Muunnos on *ohjelmoitu laskimiin* (X voi kaivaa sen laskimestasi)

$$z = 3 + j4 = 5\angle 53,13^\circ$$



$$x = r \cos \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \theta \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Summamuoto \Leftrightarrow Kulmamuoto, *Calculators*

Eri laskimissa eri tavoin, alla esimerkkejä. Joskus vaaditaan sulut, toisinaan s. t. e.

$$\begin{array}{llll} \text{POL}(x,y) & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P} & \rightarrow r\theta & x(r) \rightarrow a, y(\theta) \rightarrow b \\ \text{REC}(r,\theta) & \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R} & \rightarrow xy & r,\theta \rightarrow \text{REC} \\ \text{REC}(r\angle\theta) & & & x+yi \leftrightarrow re^{i\theta}[\text{t.l. luuleerad, vaikka deg valittu}] \\ x \leftrightarrow y & \Updownarrow & \text{INV RV} & \text{RCL tan} \\ \text{math-} & \text{angle-} & \text{cmplx-} & \text{menu} \end{array}$$

Kulmaa saa pyörittää $\pm 360^\circ$

$$2\angle 240^\circ = 2\angle -120^\circ$$

t.l. = typerä laskin!

Koordinaatiston neljännekset, *Quadrants*

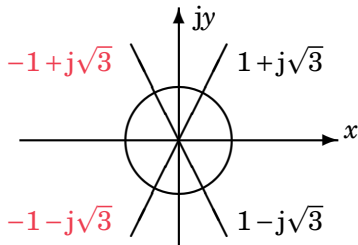
Ongelmia arcus-tangentin kanssa ($x < 0$). *Why does \tan^{-1} suck?!*

$$1 + j\sqrt{3} = 2 \angle \pm 60^\circ$$

$$-1 + j\sqrt{3} = 2 \angle (180^\circ - 60^\circ) = 2 \angle 120^\circ$$

$$-(1 - j\sqrt{3}) = 2 \angle (180^\circ - 60^\circ) = 2 \angle 120^\circ$$

$$-1 - j\sqrt{3} = 2 \angle (180^\circ + 60^\circ) = 2 \angle 240^\circ$$



Peruslaskutoimitukset

Eulerin identiteetti: $e^{j\pi} + 1 = 0$

$$z_1 = 4 + 2j = \sqrt{20} \angle 26,6^\circ = \sqrt{20} e^{j26,6^\circ}$$

$$z_2 = 3 + 1j = \sqrt{10} \angle 18,4^\circ = \sqrt{10} e^{j18,4^\circ}$$

$$z_1 + z_2 = (4+3) + j(2+1) \qquad j^2 = -1$$

$$z_1 - z_2 = (4-3) + j(2-1) \qquad \frac{1}{j} = -j$$

$$z_1 z_2 = (4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) + j(4 \cdot 1 + 2 \cdot 3)$$

$$\sqrt{20} \sqrt{10} \angle (26,6^\circ + 18,4^\circ) = 10 + j10$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + j(2 \cdot 3 - 4 \cdot 1)}{3^2 + 1^2}$$

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} \angle (26,6^\circ - 18,4^\circ) = 1,4 + j0,2$$

$$z_1^* = 4 - j2 = \sqrt{20} \angle -26,6^\circ = \sqrt{20} e^{-j26,6^\circ}$$

$$z_1 z_1^* = |z_1|^2 = 4^2 + 2^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$$

Jakolasku kulmamuodossa ja kertominen j:llä

Lisäesimerkki

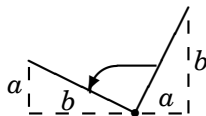
$$z_1 = A e^{j\alpha} = a + jb \quad (1)$$

$$z_2 = B e^{j\beta} \quad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)} = \frac{A}{B} \angle \alpha - \beta \quad (3)$$

$$j(a + jb) = \underbrace{(0 + 1j)}_{1 \angle 90^\circ} \underbrace{(a + jb)}_{A \angle \alpha} = -b + ja \quad (4)$$

$$1 \angle 90^\circ \cdot A \angle \alpha = A \angle \alpha + 90^\circ \quad (5)$$



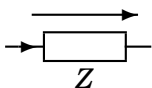
Impedanssi Z ja admittanssi Y

Reaali- ja imaginaariosineen, Ohmin laki

Onko impedanssi vaihtovirtavastus? Tarkkaan ottaen ei!

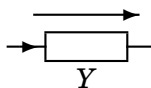
Pyörrevirrat kasvattavat tavallista resistanssia vaihtovirralla.

$$U = ZI$$



$$Z = R + jX$$

$$I = YU$$



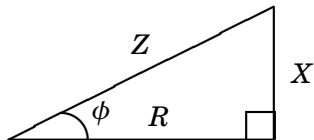
$$Y = G + jB = \frac{1}{Z}$$

R = resistanssi (pätövastus) (Ω)

X = reaktanssi (loisvastus) (Ω)

G = konduktanssi (S)

B = susceptanssi (S)



Vastus, kela, kondensaattori

Impedanssit Z_R, Z_L, Z_C , osoitinlaskennan ydin!

$$u_L = L \frac{d}{dt} [\hat{i} \sin(\omega t + \phi)] = \omega L \underbrace{\hat{i} \cos(\omega t + \phi)}_{\hat{i} \sin(\omega t + \phi + 90^\circ \leftarrow -j)}$$

j:llä kertominen vastaa kompleksiluvun kulman kääntämistä 90° .

$$i = |I|e^{j(\omega t + \phi)} \quad u = |U|e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \underbrace{j\omega L}_{Z_L} \underbrace{|I|e^{j(\omega t + \phi)}}_i \Rightarrow U_L = Z_L I$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} = \underbrace{j\omega C}_{\frac{1}{Z_C}} \underbrace{|U|e^{j(\omega t + \theta)}}_u \Rightarrow I_C = \frac{1}{Z_C} U_C$$

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

Onko kompleksinen virta tai jännite järkevää?

Jaetaan eksponenttifunktio kahdeksi tulon tekijäksi:

$$\underline{i} = \hat{i} e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{i} e^{j\omega t} e^{j\varphi} = \sqrt{2} I_{\text{eff}} e^{j\omega t} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Viedään lauseke vastukseen kelaan tai kondensaattoriin:

$$u_R = Ri = R I_{\text{eff}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = j\omega L I_{\text{eff}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

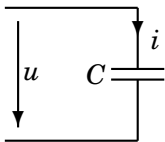
$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{j\omega C} I_{\text{eff}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \cdot \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

Aina toistuva $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ voidaan "jättää" yhteisenä tekijänä pois.

$$\underline{I} = I_{\text{eff}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) = \underbrace{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}}_1 \cdot I_{\text{eff}} \angle \varphi$$

Ajan vai taajuuden funktiona? *Function of time vs. $j\omega$*

Valitset sen itse; katso myös seuraava sivu!

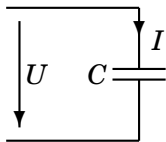


$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = \omega C \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ)$$

$$\hat{i} = \omega C \hat{u}$$



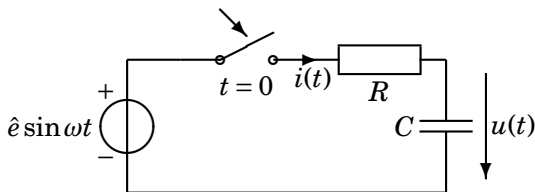
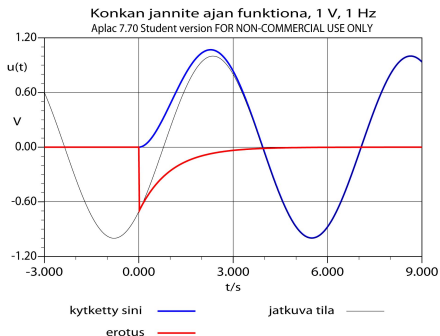
$$U = |U| \angle \varphi_u$$

$$I = j\omega C U$$

$$I = \omega C |U| \angle \varphi_u + 90^\circ$$

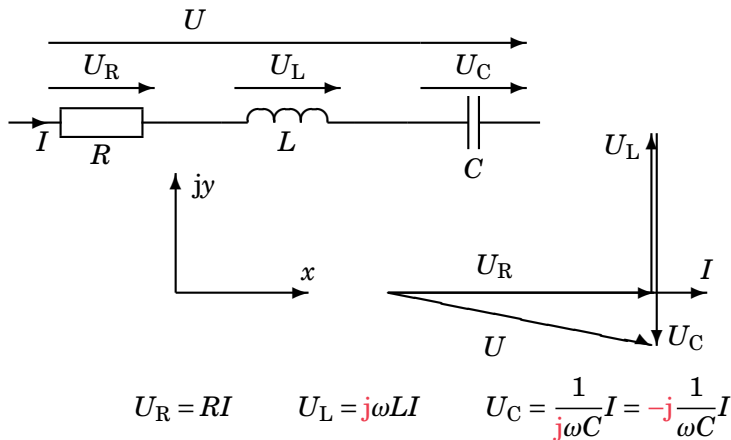
$$\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$$

Kytkestäilmiö vs. jatkuva tila, *Steady State*



Osoitindiagrammi, Phasor Diagram

Havainnollistava graafinen esitys



Tentti 20.12.2001

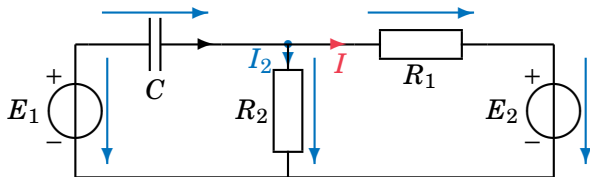
Tällainen tehtävä tulee jokaiseen ykkösvälikokeeseen ja tenttiin!

Laske virta I . $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $C = 0,1 \text{ F}$, $\omega = 2 \frac{1}{\text{s}}$.

$E_1 = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$, $E_2 = 20 \angle 90^\circ \text{ V}$

$e_1(t) \approx 14 \sin \omega t \text{ V}$

$e_2(t) \approx 28 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$



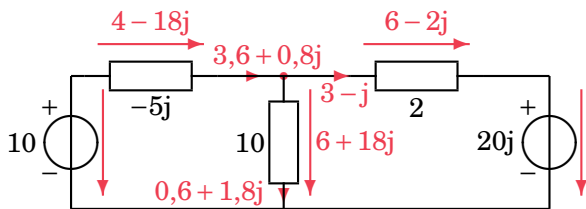
$$-E_1 + \frac{1}{j\omega C} (I_2 + I) + R_2 I_2 = 0 \quad -R_2 I_2 + R_1 I + E_2 = 0$$

Tulokset

Kompleksiluvut ja sinimuotoiset lausekkeet toteuttavat Kirchhoffin lait

Osoitinlaskennan käytännön laskutoimituksia ja tulosten tulkintaa on selitetty tarkemmin laskuharjoituksissa ja kirjassa.

$$\text{KCL : } (3,6 + 0,8j) = (3 - j) + (0,6 + 1,8j) \quad \text{KJL : } -(6 + 18j) + (6 - 2j) + 20j = 0$$



$$I = 3 - j = 3,16 \angle -18,4^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 4,47 \sin(\omega t - 18,4^\circ) \text{ A}$$

Tulosten tulkinta

Kompleksiluku vastaa tiettyä ajan funktiota sopimukseen perustuen!

