SÄHKÖTEKNIIKKA JA ELEKTRONIIKKA

tXt-2 2017, Kimmo Silvonen

Osa II, 25.9.2017

1 Muutosilmiöt ja differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa rajoitutaan pääasiassa tasajännitelähteisiin liittyviin muutosilmiöihin, vaikka samanlainen matemaattinen käsittely onkin sovellettavissa myös yleisempiin tapauksiin. Muutosilmiölaskentaa kutsutaan myös **transienttianalyysiksi**. Vaihtojännitteet, pulssit ja muut aaltomuodot on usein viisainta käsitellä numeerisesti simuloimalla tai Laplace-muunnoksen avulla. Joskus muutosilmiöistä on haittaa ja joskus niitä käytetään hyödyksi. Haittoja ovat esimerkiksi toiminnan tai vasteen hidastuminen ja aaltomuodon vääristyminen, hyötykäyttöä toisaalta myös esimerkiksi aaltomuodon muokkaaminen. Puhtaasti resistiivisissä piireissä ei tässä käsiteltyjä (hitaita) muutosilmiöitä esiinny lainkaan; jännite ja virta voivat muuttua salamannopeasti ja samanaikaisesti. Hyvin nopeita tai hitaita muutosilmiöitä ei muutenkaan aina tarvitse ottaa huomioon.

1.1 Reaktiiviset komponentit

Kelan ja kondensaattorin energiavarastot aiheuttavat piireihin hitautta. Virta muuttaa kondensaattorin varausta ja siihen verrannollista jännitettä äärellisellä nopeudella. Samoin kelan energiavarasto, käämivuo, ja siihen verrannollinen virta eivät voi muuttua yht'äkkisesti. Äärettömän nopea energian muutos vaatisi äärettömän suuren tehon.

Kondensaattori siis pyrkii jarruttamaan jännitteen muuttumista ja kela virran muutosta. Toisaalta kelan jännite ja kondensaattorin virta voivat muuttua askelmaisestikin, koska varastoituneet energiat eivät riipu kyseisistä suureista. Keloja, muuntajia ja kondensaattoreita nimitetään yhteisesti **reaktiivisiksi komponenteiksi**. Resistanssista nämä erottaa mm. energian varauskyky, joka vastukselta puuttuu. Reaktanssit eivät toisaalta kuluta energiaa; varastoinnissa energia ei vähene. Vastus puolestaan kuluttaa energiaa muuttamalla sähköenergian lämmöksi. "Puhtaassa" kelassa ja kondesaattorissa ei synny missään tilanteessa lämpöä.

Muutosilmiöiden matemaattinen käsittely perustuu kelan ja kondensaattorin jännite–virta-yhtälöihin **aika-alueessa** (*time domain*):

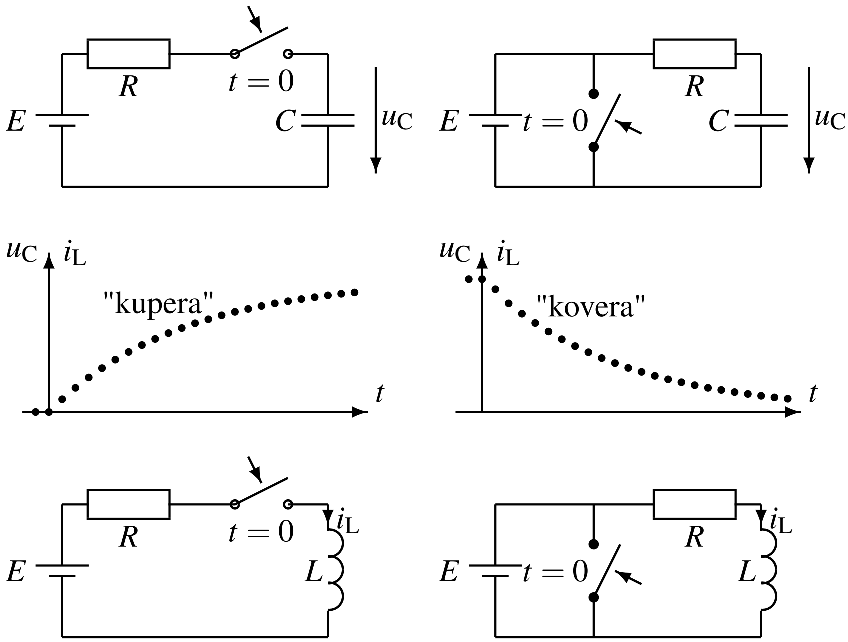
$$u_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} \qquad i_\mathrm{L}(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_\mathrm{L}\,\mathrm{d}t + i(0) \qquad i(0) = I_\mathrm{L0} \tag{1}$$

$$i_\mathrm{C} = C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \qquad u_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_\mathrm{C}\,\mathrm{d}t + u(0) \qquad u(0) = U_\mathrm{C0} \tag{2}$$

Tarkastelun alkuhetken $(t = 0)$ tilalla voi olla mikä tahansa hetki t_1, kunhan virran ja jännitteen alkuarvot vastaavat integroinnin alarajaa (kaavat 1 ja 2). Myös integroinnin loppukohta $t = t_2$ voi olla mikä tahansa.

Yksinkertaisimmissa tapauksissa piirissä on vastusten, lähteen ja mahdollisen kytkimen lisäksi vain yksi kela (RL-piiri) tai yksi kondensaattori (RC-piiri). Tällaisen piirin analyysi perustuu tilanteesta riippuen yhteen yllä mainituista neljästä yhtälöstä. Taulukkoon 1 on koottu yhteenvetona muutosilmiöiden muoto yleisimmissä käytännön tilanteissa (yksi kondensaattori tai yksi kela); helpoimmin tosin "muistat" taulukon tulokset laskemalla ne itse derivaatan tai integraalin avulla.

LC- ja RLC-piirit sekä piirit, joissa on kaksi kondensaattoria tai kaksi kelaa, johtavat toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöihin. Näitä voidaan tehokkaimmin käsitellä Laplace-muunnoksella (Pierre Simon Laplace) tai piirisimulointiohjelmilla. Syntyvät **muutosilmiöt** ovat usein **eksponentiaalisia** (kuva 1) tai eksponentiaalisesti vaimenevia siniaaltoja, kuten RLC-piireissä.



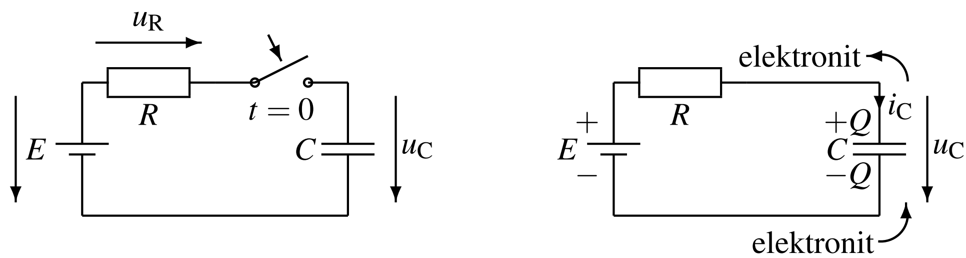
Kuva 1. Kondensaattorin ja kelan kytkentäilmiöiden vertailu (johdantona aiheeseen). Huomaa, miten kondensaattorin jännitteen ja kelan virran muutosilmiöt ovat samanmuotoiset. Jännitelähteen nollaaminen on käytännössä yleensä tehtävä eri tavalla kuin kuvassa oleva oikosulkeminen! Tapausten matemaattinen käsittely on tuonnempana.

Taulukko 1. Kelan ja konkan muutosilmiöt tietyissä tilanteissa (*kupera* ja *kovera* eksponenttikäyrä [siis ylhäältä katsottuna] ovat omaa terminologiaani). Kasvava kovera tai pienenevä kupera eksponenttikäyrä eivät olisi fysikaalisesti mahdollisia, koska ne lähestyvät ajan funktiona plus- tai miinus-ääretöntä.

i_L tai u_C	$u_L = L\frac{di_L}{dt}$ tai $i_C = C\frac{du_C}{dt}$
vakio (d.c.)	0
lineaarisesti eli suoraviivaisesti kasvava	positiivinen vakio
lineaarisesti eli suoraviivaisesti pienenevä	negatiivinen vakio
kasvava kupera eksponenttikäyrä	pienenevä kovera eksponenttikäyrä
pienenevä kovera eksponenttikäyrä	kasvava kupera eksponenttikäyrä

1.2 Kondensaattorin varaaminen

Oletetaan aluksi, että kondensaattorin alkujännite $U_{C0} = 0$; konkka on siis varaukseton. Kun kytkin suljetaan (sulkeminen on merkitty kuvaan 2 nuolella), kondensaattori alkaa varautua tasajännitelähteestä vastuksen kautta. Virta kulkee kunnes kondensaattorin jännite u_C on saavuttanut jännitelähteen jännitteen E. Tätä kutsutaan **jatkuvuustilaksi** (*steady state*). Tasavirta näyttää siis kulkevan kondensaattorin läpi, jos kondensaattorin jännitettä muutetaan $\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \neq 0\right)$. Poraa kokeilumielessä läpinäkyvän mukin pohjaan reikä, laske mukiin raanasta vettä ja sammuta sitten raana! Huomaat, että reiästä virtaa vettä ulos vain, jos nesteen pinnan korkeus (vrt. jännite tai varaus) mukissa muuttuu. Tämä kuvaa oikeastaan parhaiten yhden kondensaattorilevyn varauksen muuttumista. Fysikaalisesti virta ei kulje kondensaattorin eristeen läpi, vaan ainoastaan jännitelähteestä johtimia pitkin kondensaattorin levyihin, jotka varautuvat vastakkaismerkkisesti; virta siis kuljettaa toiseen levyyn positiivisen ja toiseen itseisarvoltaan yhtä suuren negatiivisen **varauksen** $\pm Q$.



Kuva 2. Kondensaattorin varaaminen tasajännitteeseen. Oikealla piiri kytkimen sulkemisen jälkeen. Kuvassa kondensaattoriin on siirtynyt kokonaisvaraus Q.

1.3 Differentiaaliyhtälö ja yrite

Muutosilmiö voidaan analysoida Kirchhoffin jännitelain avulla:

$$E = u_R + u_C = Ri_C + u_C \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Seuraavassa esitetään "rinnakkain" kaksi vaihtoehtoista tapaa tehtävän ratkaisemiseksi.

1. Derivointi puolittain t:n suhteen. Huomaa, että E on vakio ja R on

vakiokerroin:

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + \frac{i_\mathrm{C}}{C} \tag{4}$$

2. Lausutaan vaihtoehtoisesti virta jännitteen avulla:

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} \tag{5}$$

Saadaan siis kaksi hieman erimuotoista **differentiaaliyhtälöä**

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + \frac{i_\mathrm{C}}{C} \qquad \text{tai} \qquad E = RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} \tag{6}$$

Molemmat ovat ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, koska niissä ei ole toista derivaattaa eikä korkeampia derivaattatermejä. Differentiaaliyhtälössä on tyypillisinä osina funktio, funktion derivaatta ajan suhteen, sekä mahdollisesti summattava vakiotermi (E) ja vakiokertoimia, kuten RC. Ensimmäinen yhtälö on **homogeeninen**, koska siitä puuttuu vakiotermi. Differentiaaliyhtälöä ei derivaatan takia voida ratkaista siten, että otettaisiin tuntematon muuttuja yhteiseksi tekijäksi. Differentiaaliyhtälön ratkaisuna on yleensäkin vain poikkeustapauksessa jokin vakio; yllä $i_\mathrm{C} = 0$ tai $u_\mathrm{C} = E$ kävisivät ratkaisuiksi, mutta ne eivät yleensä toteuta alku- tai lopputilan **reunaehtoja**.

Muut mahdolliset ratkaisut löydetään esimerkiksi yritteen avulla. Vain tietyn muotoiset funktiot ovat yllä olevien differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja. **Yrite** määrittelee tämän funktion yleisen (ja ainoan mahdollisen) muodon. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ainoat mahdolliset ratkaisut eli yritteet ovat seuraavat:

$$i_\mathrm{C} = i(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad\qquad u_\mathrm{C} = u_\mathrm{C}(t) = B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7}$$

A:n edessä voi oman maun mukaan olla myös miinusmerkki, koska A voi olla positiivinen tai negatiivinen. Yritteen voi perustella esimerkiksi seuraavasti; jatketaan yhtälöstä (6):

$$E - u_\mathrm{C} = RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{RC} + \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{u_\mathrm{C} - E} = 0 \tag{8}$$

Integroidaan puolittain:

$$\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}t}{RC}}_{\frac{t}{RC}} + \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{u_\mathrm{C} - E}}_{\ln(u_\mathrm{C}-E)+c} = 0 \tag{9}$$

missä c on **integroimisvakio**, jonka arvo määräytyy alkutilan perusteella. Saatiin vaihtoehtoinen tapa differentiaaliyhtälön ratkaisemiseen:

$$\ln(u_\mathrm{C} - E) = -\frac{t}{RC} - c \tag{10}$$

$$\Rightarrow u_\mathrm{C} - E = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC} - c} \tag{11}$$

$$u_\mathrm{C}(t) = \underbrace{E}_{B} + \underbrace{\mathrm{e}^{-c}}_{A}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{12}$$

Lopputuloksesta voidaan tunnistaa vakiot A ja B.

1.4 Vakioiden arvot, Munat ja jauhot -menetelmä

Tehtäväksi jää ratkaista reaalisten (reaaliluku) **vakiokertoimien** A, B ja τ arvot, jotka riippuvat mm. piirin **alku- ja lopputilasta**. **Aikavakio** τ on aina positiivinen, mutta A ja B voivat olla positiivisia tai negatiivisia. Merkinnät i ja $i(t)$ tarkoittavat aina samaa eli ajan funktiona muuttuvaa virtaa! Huomaa, että vakio τ on sama molemmissa yritteissä (7), mutta vakio A on ensimmäisessä yritteessä virta ja jälkimmäisessä jännite. Samanlaista yritettä voidaan käyttää tilanteesta riippuen joko virralle tai jännitteelle, koska differentiaaliyhtälöt ovat samanmuotoiset. Sijoitetaan yritteet differentiaaliyhtälöihin vakioiden ratkaisemiseksi. Vaikka tässä käsitellläänkin molempia yhtälöitä yhtä aikaa, riittää käytännössä vain toisen yhtälön tarkastelu.

$$0 = R\frac{\mathrm{d}\left(A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}{C} \qquad E = RC\frac{\mathrm{d}\left(B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{\mathrm{d}t} + (B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{13}$$

$$0 = -RA\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{A}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad E = RC\left(0 - A\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) + (B + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{14}$$

$$0 = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\underbrace{\left(-R\frac{1}{\tau} + \frac{1}{C}\right)}_{0} \qquad 0 = \underbrace{(B - E)}_{mnt=0} + \underbrace{\left(A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - RCA\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}_{jht=0} \tag{15}$$

Vasemmassa yhtälössä sulkulausekkeen tulee olla nolla. Jälkimmäisessä yhtälössä ei oikealla puolella saa olla *'munia'* (*mnt*) eikä *'jauhoja'* (*jht*), koska niitä ei ole yhtälön toisellakaan puolella (oletetaan sama määrä munia ja jauhoja taikinaan kuin oli reseptissäkin). Munat eivät voi kumota jauhoja ja vakio-osa ei voi kumota ajasta riippuvaa osaa ainakaan kaikilla t:n arvoilla. Siis vakio-osien E ja B tulee olla yhtä suuret ja yhtälön ajasta riippuvien osien tulee kumota toisensa.

Nämä vaatimukset voidaan todistaa esimerkiksi tutkimalla yhtälöä kahdella eri hetkellä: esimerkiksi, kun $t = \infty$, ja kun $t \neq \infty$ (esim. $t = 0$). Yhtälöidenhän on toteuduttava **kaikilla** t:n positiivisilla **arvoilla**, koska tarkastelu alkaa kytkimen sulkeuduttua hetkellä $t = 0$. Vasemmanpuoleisesta yhtälöstä nähdään heti, että $\tau = RC$. Oikeanpuoleisesta yhtälöstä voidaan ratkaista B ja τ (vasemmassa yhtälössä B olisi nolla).

$$B = E \qquad RCA\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \tau = RC \tag{16}$$

Huomataan, että molemmista yhtälöistä jäi vielä vakio A ratkaisematta. Se lasketaankin aina **alkutilanteen** perusteella. Yritteiden tulee olla yhteensopivia **alkuvirran** ja **alkujännitteen** kanssa. Tulokset riippuvat kondensaattorin varaustilasta tarkastelun alkuhetkellä. Oletetaan aluksi, että alkujännite $U_{C0} = 0$; sen tulee olla yhteensopiva yritteen kanssa (alla oikealla). Alkuvirta $i(0)$ määräytyy kytkentäkaavion ja KJL:n perusteella (seuraavassa vasemmalla).

$$i(0) = \frac{E - U_{C0}}{R} = A\mathrm{e}^{-0} = A \qquad u_C(0) = B + A\mathrm{e}^{-0} = B + A = U_{C0} \tag{17}$$

$$A = \frac{E}{R} \qquad A = U_{C0} - B = -E \tag{18}$$

Kun A on ratkaistu, tunnetaan virran ja jännitteen lausekkeet yksikäsitteisesti:

$$i_C(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad u_C(t) = E - E\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{19}$$

Jännite voidaan tietysti laskea myös virrasta ja virta jännitteestä.

$$u_C(t) = E - Ri_C(t) \qquad i_C(t) = \frac{E - u_C(t)}{R} \tag{20}$$

Edellä ratkaisu perustui derivaattamuotoisiin yhtälöihin. Ratkaisu integraalimuotoisten yhtälöiden kautta on lähes yhtä helppo, mutta käytännössä harvinaisempi tapa; voit yrittää sitä itse. Jos derivoit yhtälön puolittain (mikä tosin ei ole välttämätöntä), huomaa, että funktion integraalin derivaatta on funktio itse:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t i_C\,\mathrm{d}t + U_{C0}\right) = i_C + 0 \tag{21}$$

Alkuarvo U_{C0} on vakio, joten sen derivaatta on nolla.

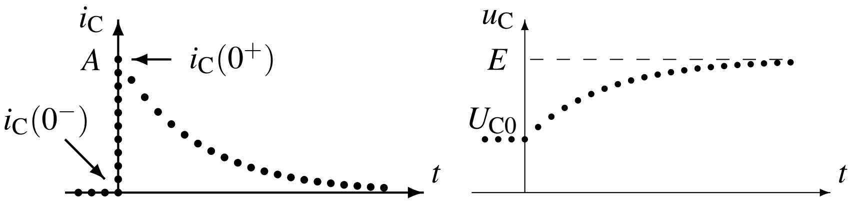
Vakiot A ja B voidaan laskea samalla tavalla kuin äsken, vaikka alkujännite U_{C0} ei olisikaan nolla. Tällöin:

$$i_C(t) = \underbrace{\frac{E - U_{C0}}{R}}_{A} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad u_C(t) = \underbrace{E}_{B} + \underbrace{(U_{C0} - E)}_{A} \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad (22)$$

Käyrät ajan funktiona on piirretty kuvaan 3.

Muutosilmiön **yleinen esitysmuoto** mahdollistaa matemaattisen käsittelyn jopa ilman differentiaaliyhtälöä, koska alku- ja loppuarvot voidaan päätellä suoraan piiristä:

$$i_C(t) = \underbrace{i(0)}_{A} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad u_C(t) = \underbrace{u(\infty)}_{B} + \underbrace{[u(0) - u(\infty)]}_{A} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad (23)$$

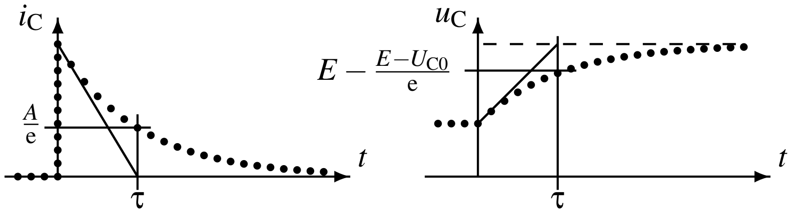


Kuva 3. Jännitteen ja virran aaltomuodot. Kuvaan on merkitty myös virran raja-arvot, kun hetkeä $t = 0$ lähestytään vasemmalta tai oikealta: $i_C(0^-)$ ja $i_C(0^+)$. Kondensaattorin jännite on aina jatkuva, joten $U_{C0} = u_C(0) = u_C(0^-) = u_C(0^+)$. Jos $U_{C0} = E$, ei muutosilmiötä tapahdu, koska alku- ja lopputila ovat samat.

1.5 Aikavakio määrää muutosilmiön nopeuden

Vakiota τ kutsutaan **aikavakioksi**, joka kuvaa muutosilmiön nopeutta (yksikkönä sekunti). Virran tai jännitteen alkuarvo ei vaikuta aikavakioon mitään. Monissa yksinkertaisissa piireissä aikavakio lasketaam kaavalla $\tau = RC$, missä R voi koostua useamman vastuksen (näennäisestä) sarjaan- tai rinnankytkennästä. Käytännön elektroniikkapiireissä vastusarvot vaihtelevat tyypillisesti välillä 0,1 Ω … 100 MΩ ja kapasitanssit välillä 10 pF … 10 000 μF. Tämän perusteella aikavakio voi eri tilanteissa vaihdella varsin laajoissa rajoissa 1 ps … 1 Ms (1 Ms $\approx$ 278 h). Muutosilmiöitä ei siis aina tarvitse ottaa huomioon, jos ne ovat riittävän nopeita tai äärimmäisen hitaita.

Aikavakion τ kuluttua kytkimen sulkemisesta virta on pudonnut e:nteen osaan eli se on enää 37 % maksimistaan ($1/\mathrm{e} \approx 0{,}37$). Jännite puolestaan on noussut 63 % alkutilan U_{C0} ja lopputilan E välisestä tasoerosta ($1 - 1/\mathrm{e} \approx 0{,}63$). Aikavakio voidaan myös määrittää esimerkiksi piirretystä käyrästä tai oskilloskoopin kuvaputkelta kohtaan $t = 0$ piirretyn käyrän tangentin avulla (kuva 4). Käytännössä 37 % tai 63 % pisteiden hakeminen lienee tarkempi menetelmä.



Kuva 4. Aikavakion määrittäminen käyrän tangentin perusteella tai alku- ja lopputilojen korkeuseron perusteella. Tangentin suuntaa on käytännössä vaikea arvioida tarkasti.

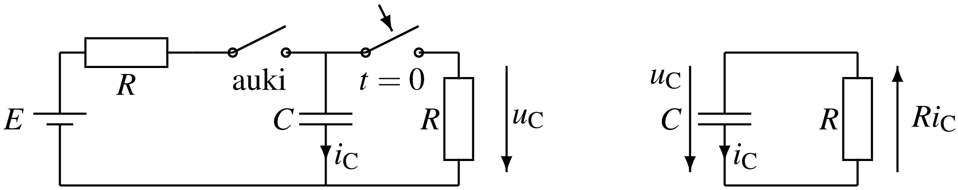
Kondensaattorin virran raja-arvot ovat eri suuret riippuen siitä, lähestytäänkö hetkeä nolla positiiviselta vai negatiiviselta puolelta. Merkintä $i(0^-)$ tarkoittaa **raja-arvoa**, kun nollaa lähestytään **miinus-puolelta** ja vastaavasti merkintä $i(0^+)$ **raja-arvoa plus-puolelta**. Koska kondensaattorin jännite on jatkuva, ovat myös raja-arvot vasemmalta ja oikealta samat.

$$u_{\mathrm{C}}(0^-) = u_{\mathrm{C}}(0^+) = u_{\mathrm{C}}(0) = U_{\mathrm{C0}} \tag{24}$$

Sen sijaan virta on epäjatkuva, yllä $i_{\mathrm{C}}(0^-) = 0$ ja $i_{\mathrm{C}}(0^+) = A$, missä A on vakio (ei ampeeri).

1.6 Kondensaattorin varauksen purkaminen

Jos varattu kondensaattori kytketään virtapiiriin, kondensaattorin varaus ja jännite muuttuvat uutta tilannetta vastaaviksi (kuva 5).



Kuva 5. Kondensaattorin varauksen purkaminen. Oikealla piiri kytkimen sulkemisen jälkeen ($t \geq 0$).

Ensin vasen kytkin avattiin ($t < 0$), kun kondensaattori oli latautunut jännitteeseen U_{C0}. Suljetaan toinen kytkin hetkellä $t = 0$.

$$u_C + Ri_C = 0 \Rightarrow u_C = -Ri_C = -RC\,\frac{du_C}{dt} \tag{25}$$

Koska yhtälö on homogeeninen, otetaan avuksi se yrite, jossa $B = 0$.

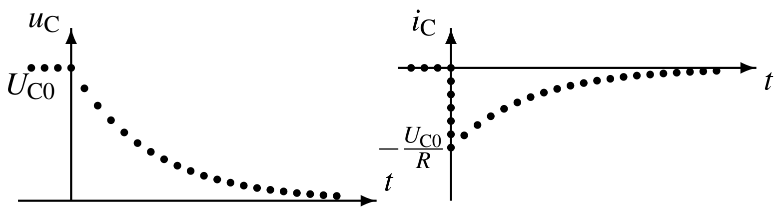
$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow Ae^{-\frac{t}{\tau}} = -RCA\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{26}$$

$$\Rightarrow \tau = RC \tag{27}$$

Koska yritteen perusteella $U_{C0} = u_C(0) = Ae^{-0} = A$, vakion A tulee olla yhtä suuri kuin U_{C0}.

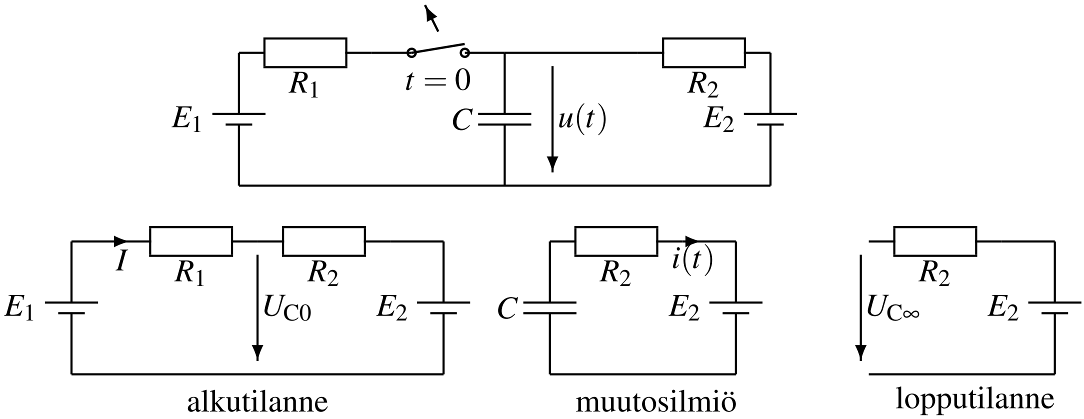
$$u_C(t) = U_{C0}\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad\qquad i_C(t) = -\frac{u_C(t)}{R} \tag{28}$$

Yllä olevat tulokset on piirretty kuvaan 6. Huomaa, että käyrät ovat kytkimen sulkemisen jälkeen samanmuotoiset kuin latauksessa (kuva 3), mutta u_C ja i_C vaihtavat paikkaa. Pystyakselin kohdalla **jännite on jatkuva**, mutta **virta muuttuu yht'äkkisesti**; juuri tämä on ominaista kondensaattorille.



Kuva 6. Kondensaattorin purkauskäyrät. Virran oletussuunta säilytettiin paremman vertailtavuuden takia samana kuin latauksessa, vaikka todellisuudessa purkausvirta kulkee luonnollisesti vastakkaiseen suuntaan ($i_C \leq 0$).

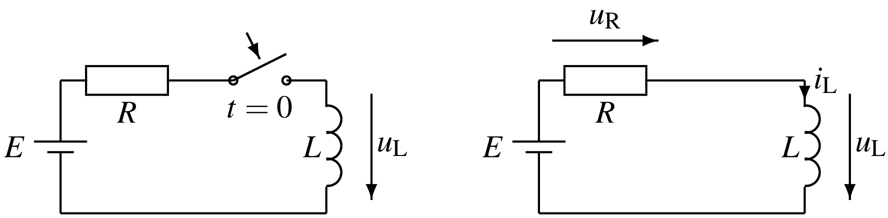
Alku- ja lopputilan tarkastelua on selitetty kuvassa 7.



Kuva 7. Kondensaattorin alku- ja loppujännitteen laskeminen, kun kytkin avataan hetkellä $t = 0$; jatkuvassa tilassa virraton kondensaattori voidaan poistaa.

1.7 Kelan kytkeminen piiriin

Kelan muutosilmiöt ovat muuten samanmuotoisia kuin kondensaattorin, mutta kelassa **virran** tulee olla **jatkuva** ja **jännite voi muuttua yht'äkkisestikin**. Kuvassa 8 kela, jonka virta on aluksi nolla, kytketään jännitelähteeseen. Tämän jälkeen virta alkaa hiljalleen kulkea kelan läpi eli kela *energisoituu*.



Kuva 8. Kelan kytkeminen tasavirtapiiriin.

Muutosilmiötä kuvaa Kirchhoffin jänniteyhtälö:

$$E = u_R + u_L = Ri + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \tag{29}$$

Koska nyt differentiaaliyhtälö sisältää vakiotermin E, käytetään seuraavaa yritettä

$$i_L(t) = B + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \tag{30}$$

Yllä olevan differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis aina tätä muotoa. Sijoitetaan yrite yhtälöön

$$\underbrace{E = RB}_{\text{vakio}-\text{osa}} + \underbrace{RA\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - L\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{f(t)} \tag{31}$$

Tämän on oltava voimassa kaikilla t:n ei-negatiivisilla arvoilla.

$$E = RB \qquad f(t) = RA - L\frac{A}{\tau} = 0 \tag{32}$$

$$B = \frac{E}{R} \qquad \tau = \frac{L}{R} \tag{33}$$

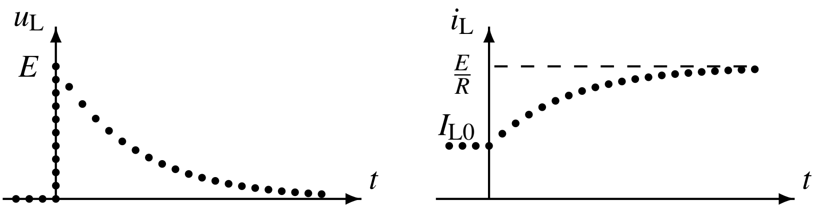
Yksinkertaisten RL-piirien aikavakio on yleisesti muotoa $\tau = L/R$. **Vastuksen suurentaminen nopeuttaa** muutosilmiötä toisin kuin RC-piireissä. Vakio A lasketaan jälleen alkuehdon perusteella: $I_{\mathrm{L0}} = i_{\mathrm{L}}(0) = 0$.

$$i_{\mathrm{L}}(0) = \frac{E}{R} + A\mathrm{e}^{-0} = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R} \tag{34}$$

$$i_{\mathrm{L}}(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}}\right) \tag{35}$$

$$u_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = E\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}} \tag{36}$$

Jos alkuvirta ei jostain syystä olisi nolla, pysyisivät aikavakio τ ja kerroin B ennallaan, mutta vakio A muuttuisi, kuten kondensaattorinkin tapauksessa: $A = I_{\mathrm{L0}} - \frac{E}{R}$. Alkuvirta ei kuvan piirissä voi ilman lisäjärjestelyjä olla muuta kuin nolla. Kelan mahdollinen alkuvirta voisi korkeintaan tulla sellaisesta piirin osasta, joka irrotetaan heti kytkimen sulkemishetkellä. Virta $i_{\mathrm{L}}(t)$ kasvaa tai pienenee eksponenttikäyrää pitkin alkuarvosta I_{L0} loppuarvoon E/R (kuva 9).



Kuva 9. Virran kytkeminen kelaan eli kelan energiavaraston lataaminen. Vertaa käyriä kondensaattorin lataus- ja purkauskäyriin.

Kuten huomaat, on kelan virta kytkentähetkellä (aina) jatkuva

$$i_\mathrm{L}(0^-) = i_\mathrm{L}(0^+) = i_\mathrm{L}(0) = I_\mathrm{L0} \tag{37}$$

mutta jännite on epäjatkuva, kuten kelassa yleensäkin:

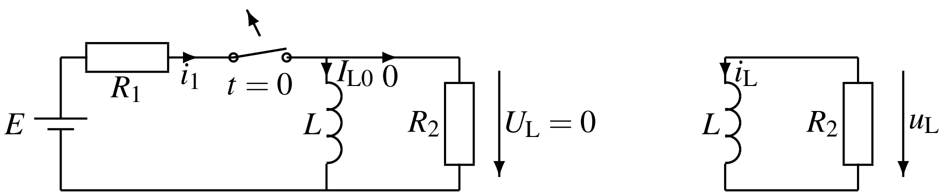
$$u_\mathrm{L}(0^-) = 0 \tag{38}$$

$$u_\mathrm{L}(0^+) = E \tag{39}$$

1.8 Kelan energiavaraston purkaminen

Edellisen kohdan piiriin voidaan jatkuvassa tilassa liittää kelan rinnalle vastus R_2 ilman, että tapahtuu muutosilmiötä, koska kelan jatkuvan tilan jännite $U_\mathrm{L} = 0$. Vaikka jännitelähde irrotetaan tämän jälkeen piiristä, ei virta heti katkea, koska kelan on ensin tyhjennettävä energiavarastonsa. Oletetaan, että ennen kytkimen avaamista muutosilmiöt ovat jo tasoittuneet. Kytkimen avaamisen jälkeen kela pyrkii jatkamaan virran kulkua, nyt vastuksen R_2 läpi. Nollataan kello samalla hetkellä, kun kytkin avataan (kuva 10). Tällöin uuden tarkastelun alkuhetkellä kelan virta on sama kuin edellisen tarkastelujakson lopussa

$$I_\mathrm{L0} = i_1 - \frac{U_\mathrm{L}}{R_2} = \frac{E - U_\mathrm{L}}{R_1} - \frac{U_\mathrm{L}}{R_2} = \frac{E}{R_1} \tag{40}$$



Kuva 10. Kelan virran katkaisu. Oikealla piiri kytkimen avaamisen jälkeen.

$$u_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} = -R_2 i_\mathrm{L} \qquad \leftarrow i_\mathrm{L}(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{41}$$

$$-L\frac{A}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = -R_2 A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{42}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R_2} \tag{43}$$

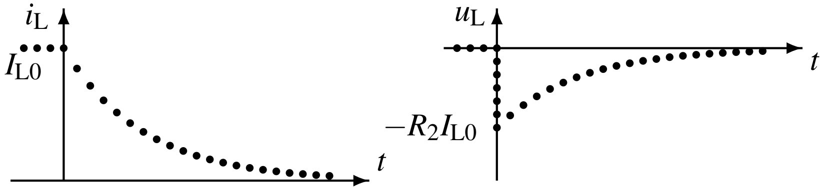
Vakio A saadaan jälleen alkuehdon perusteella

$$i_\mathrm{L}(0) = A\mathrm{e}^{-0} = A = I_\mathrm{L0} \tag{44}$$

$$i_\mathrm{L}(t) = I_\mathrm{L0}\,\mathrm{e}^{-\frac{tR_2}{L}} \tag{45}$$

$$u_\mathrm{L}(t) = -R_2 i_\mathrm{L} = -R_2 I_\mathrm{L0}\,\mathrm{e}^{-\frac{tR_2}{L}} \tag{46}$$

Huomaa, että kelaan syntyy eksponentiaalisesti vaimeneva jännitepulssi, kunnes virta on "kulunut" loppuun (kuva 11). Tämä siitä huolimatta, että piirissä ei enää kytkimen avaamisen jälkeen ole jäljellä jännitelähdettä.



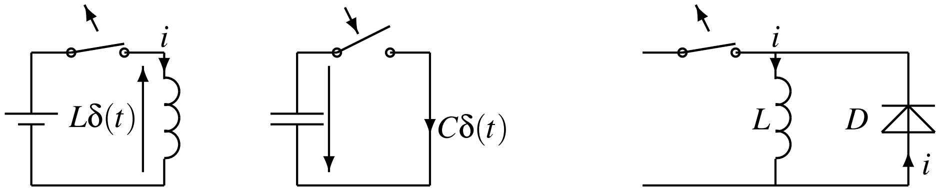
Kuva 11. Kelan virta ja jännite kytkimen avaamisen jälkeen; virta jatkaa vielä kulkuaan, vaikka jännitelähde on irrotettu piiristä!

1.9 Diracin deltafunktio on häiriöpiikki

Tarkastellaan edellä ollutta piiriä ilman vastusta R_2. Mikäli kytkin nyt avataan, ei virta pääse enää kulkemaan mitään reittiä. Kelan jännite kohoaa impulssimaisesti itseisarvoltaan hyvin korkeaksi, koska virran derivaatta on

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{0 - I_\mathrm{L0}}{0\ \mathrm{s}} = -\infty \tag{47}$$

Tarkasti ottaen kyseessä on askelfunktion **distribuutioderivaatta**, ns. Diracin (Paul A. M. Dirac) **deltafunktio** $\delta(t)$. Tällöin kela säteilee energiansa ilmaan, mikä aiheuttaa suurtaajuisia häiriöitä (myös Marconin **lennätin** toimi näin) tai jopa **valokaaren** (ilma ionisoituu ja alkaa johtaa sähköä).



Kuva 12. Impulssifunktion syntyminen, kun kelan virta katkaistaan tai jännitteellinen kondensaattori oikosuljetaan. Oikealla "häiriösuojaus" kelan rinnalle asetetulla diodilla. Kytkimen ollessa kiinni kulkee tasavirta vain kelan läpi, koska diodi on estosuunnassa. Kun kytkin avataan, purkaa kela varastoimansa energian diodiin. Diodi estää Diracin deltafunktion eli jännitepiikin syntymisen. Diodin tilalla voi joskus olla vastus.

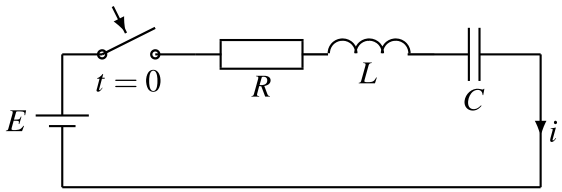
Mikäli kelan virta katkaistaan yht'äkkisesti, syntyy siis korkea **jännitepiikki**. Teoreettisesti tarkasteltuna $\delta(t)$ on äärettömän korkea, mutta äärettömän kapea pulssi, jonka pinta-ala on yksi. Deltafunktion yksikkö on 1/s. Ilmiötä käytetään hyödyksi mm. loistelamppujen sytyttimissä; lamppu syttyy korkean jännitepulssin seurauksena. Myös kondensaattorissa syntyy vastaava **virtapiikki**, jos sen jännite oikosuljetaan (kuva 12).

Puolijohdekomponentit pitää suojata piirissä mahdollisesti syntyvää ylijännitettä vastaan. Esimerkiksi releen tai tasavirtamoottorin käämin viereen (H-sillassa kytkimien viereen) järjestetään virralle ylimääräinen kulkureitti. Tähän käytetään usein diodia (kuva 12), joka normaalitilanteessa on estosuunnassa. Jos diodi korvattaisiin vastuksella, kulkisi osa käämiin tulevasta virrasta sen kautta, ellei käämiresistanssi ole hyvin pieni.

Yksi Diracin deltafunktion sovellus on piirin **impulssivasteen** laskenta. Diracin deltafunktion eli **impulssifunktion** voidaan katsoa olevan yksinkertaisin mahdollinen signaali. Kun impulssi syötetään piirin sisäänmenoon, saadaan hyvä ja pelkistetty kuva laitteen toiminnasta tutkimalla lähdön vastetta. Digitaalisten suodattimien toiminta perustuu siihen, että jatkuva signaali muutetaan ensin näytejonoksi. Jokainen näyte erikseen edustaa deltafunktiota, jonka korkeus tai näytetiheys on verrannollinen signaalin hetkellisarvoon.

1.10 RLC-piirien muutosilmiöt

LC- ja RLC-piirien muutosilmiöitä joudutaan käsittelemään 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöillä. Tarkastellaan kuvan 13 resonanssipiiriä, joka kytketään tasajännitelähteeseen hetkellä $t = 0$.



Kuva 13. Virta i kulkee kytkimen sulkemisen jälkeen niin kauan, että kondensaattori ehtii varautua jännitteeseen E. Virran aaltomuoto riippuu lukuarvoista.

Kirjoitetaan piirille kytkimen sulkemisen jälkeen differentiaaliyhtälö.

$$E = u_\mathrm{R} + u_\mathrm{L} + u_\mathrm{C} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}t \ + U_{\mathrm{C}0} \tag{48}$$

Integraalitermi voidaan haluttaessa poistaa yhtälöstä derivoimalla yhtälö puolittain (vakion $U_{\mathrm{C}0}$ derivaatta on nolla).

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} \tag{49}$$

Näin syntyy toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Yhtälön ratkaisun muoto riippuu lukuarvoista. Vaikka $U_{\mathrm{C}0}$ häviää yhtälöstä, se vaikuttaa lopputulokseen alkutilan reunaehtojen kautta. Tässä kirjassa ei käsitellä tarkemmin toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden yleistä ratkaisemista. Kun yrite on tiedossa, on vakioiden ratkaiseminen kuitenkin melko helppoa sijoittamalla yrite differentiaaliyhtälöön.

Värähtelyehto sekä yhtälön ratkaisu (kuva 14) voidaan helpoimmin johtaa Laplace-muunnoksen avulla. Ratkaisuja on kolme erilaista riippuen vastuksen suuruudesta:

1. **Alikriittinen vaimennus**

$$i(t) = \frac{E}{\omega L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t) \qquad \text{jos } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{50}$$

2. **Kriittinen vaimennus**

$$i(t) = \frac{E}{L}t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \qquad \text{jos } R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{51}$$

3. **Ylikriittinen vaimennus**

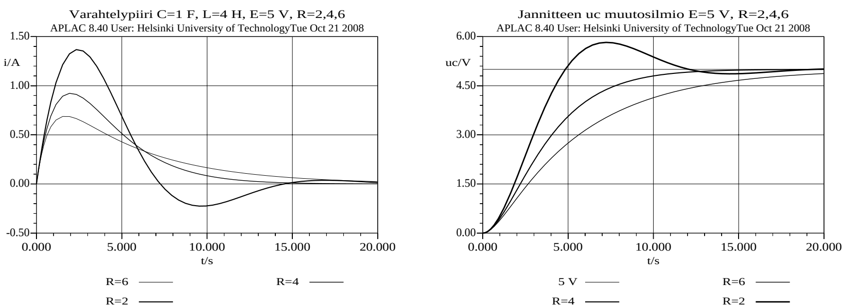
$$i(t) = \frac{E}{2kL}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left(\mathrm{e}^{kt} - \mathrm{e}^{-kt}\right) \qquad \text{jos } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{52}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{53}$$

$$k = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{54}$$

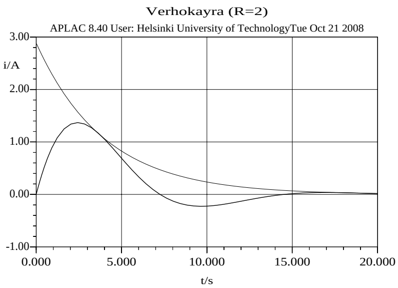
Sopivilla lukuarvoilla tasajännitelähde voi synnyttää eksponentiaalisesti vaimenevan sinimuotoisen värähtelyn (50). Jos vastus on liian suuri, syntyy vain yksittäinen pyöristynyt pulssi; virta kasvaa ensin hiljalleen maksimiinsa ja kaartuu sitten takaisin kohti nollaa (51-52).

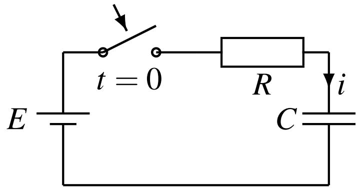
Edellä olevien lausekkeiden ohella toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisuna voi olla eksponentiaalisesti vaimenevan sinin ja kosinin summa. Ratkaisussa voi lisäksi olla summattava vakiotermi.



Kuva 14. RLC-piirin virta ja jännite (u_C) ajan funktiona kuvaan merkityillä lukuarvoilla. Jos vastus on riittävän pieni ($R < 2\sqrt{L/C}$), syntyy vaimeneva värähtely. Suuremmilla vastusarvoilla syntyy vain yksi pulssi, joka lataa kondensaattorin jännitteeseen E. Kriittinen vaimennus ($R = 4\ \Omega$) tuottaa nopeimman vasteen.

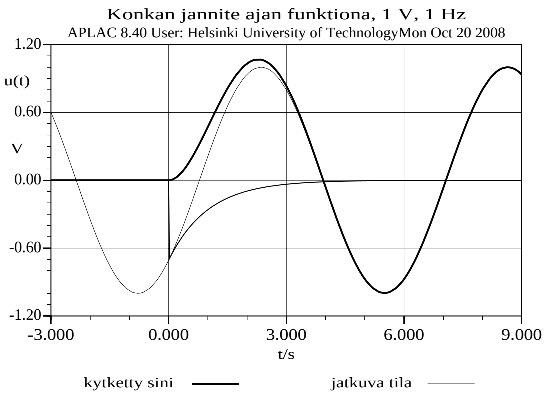
Kuvan 14 **verhokäyrä** vastaa virran muutosilmiötä kuvassa 15.





Kuva 15. Värähtelyn verhokäyrä on eksponentiaalisesti vaimeneva. Huomaa, että funktion maksimikohdat osuvat hieman eri kohtiin kuin sinin maksimit, ja siksi verhokäyrä ei kulje täsmälleen huippujen kautta. **Värähtelytaajuus** on pienempi kuin piirin resonanssitaajuus. Oikealla keinotekoinen piirimalli edellä olleen verhokäyrän laskemiseksi: $R = \omega L$, $C = \tau/R = 2L/R^2$.

Vaihtovirtapiirin muutosilmiö on esitetty kuvassa 16



Kuva 16. Hetkellä $t = 0$ kytkettävä siniaalto saavuttaa lopullisen aaltomuotonsa vasta, kun muutosilmiö (eksponenttikäyrä) on mennyt nollaan.