

# SÄHKÖTEKNIikka JA ELEKTRONIIKKA

tXt-5 2017, Kimmo Silvonen

Osa V, 30.10.2017

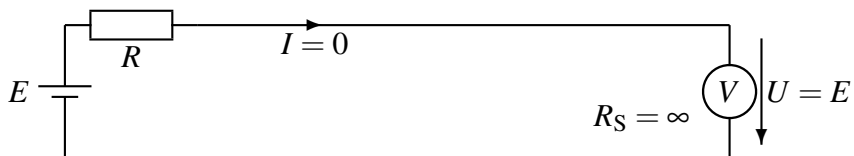
Otan mielelläni esim. sähköpostilla (kimmo.silvonen@aalto.fi) vastaan pieniäkin korjauksia (kuten painovirheet), tekstisisältötoiveita ja muita parannusehdotuksia. Tämä siis koskee kaikkia tekstejäni. Mikä kohta on hankala ymmärtää?

## 1 Siirtojohdot ja RF-tekniikka

RF-tekniikalla tarkoitetaan radiotaajuustekniikkaa laajasti ymmärrettynä.

### 1.1 Ominaisimpedanssi on jännitteen ja virran suhde

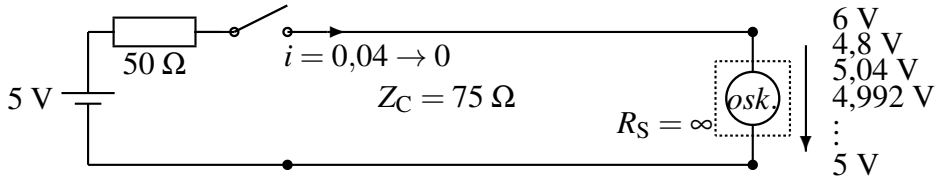
Kuva 1 esittää yksinkertaista tasajännitelähteen, vastuksettoman parijohdon ja mittarin muodostamaa kytkentää, jonka jo *luulet* osaavasi analysoida.



**Kuva 1.** Jännitelähteen virta on nolla, jos kuormana on ideaalinen jännitemittari tai oskilloskooppi. Mutta onko virta koko ajan nolla?

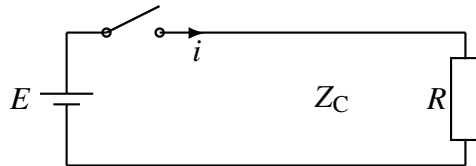
Kun oskilloskoopilla tutkitaan johdon päässä näkyvää jännitettä, huomataan, että se muuttuu kytkimen sulkemisen jälkeen portaittaisesti (kuva 2). Vasta useiden välivaiheiden jälkeen jännite saavuttaa lopullisen arvonsa  $E = 5$  V. Virta lähestyy samalla tavalla asteettaisesti nollaa. Tässä luvussa

selitetään ilmiön teoreettiset perusteet; kyse on varsinkin tasavirralla varsin yksinkertaisesta ja helposti ymmärrettävästä ilmiöstä.



**Kuva 2.** Oskilloskoopin näytöllä voidaan havaita jännitteen muuttuminen. 100 metriä pitkän teflon-eristisen koaksiaalikaapelin tai pari johdon päässä jännite hypähtää noin yhden mikrosekunnin välein. Nykyaikaisilla oskilloskoopeilla ilmiö saadaan esiin paljon lyhyemmilläkin johdoilla. Kuvaan merkityt jännitearvot vastaavat siirtojohdon ominaisimpedanssia  $Z_C = 75 \Omega$ ; ensimmäinen pulssi on todellakin 6 V korkea. Ominaisimpedanssi määritellään seuraavassa.

Tasajännitelähde liitetään kuvan 3 piiriin esimerkiksi hetkellä  $t = 0$ .



**Kuva 3.** Kun kytkin suljetaan, alkaa johdon ja vastuksen läpi kulkea virtaa. Ohmin lain mukaan virran tulisi olla  $i = \frac{E}{R}$ , kun johto oletetaan häviöttömäksi. Mutta mistä virta oikein tietää, mitä johdon toiseen päähän on kytketty (ks. teksti)?

Ennen kuin virta saavuttaa lopullisen arvonsa  $i = \frac{E}{R}$ , sen on "käytävä katsomassa", mitä johdon päähän on kytketty. Johdolle lähtevä virta määräytyy heti hetken  $t = 0$  ( $t = 0^+$ ) jälkeen johdon **ominaisimpedanssin**  $Z_C$  perusteella:  $i(0^+) = \frac{E}{Z_C}$ . Siirtojohdon ominaisimpedanssi on yleensä taajuudesta riippumaton reaaliluku, mutta sinimuotoisessa tapauksessa eli osoitinlaskennassa se voi olla myös kompleksinen. Ominaisimpedanssilla **ei ole mitään tekemistä** johdon **sarjavastuksen kanssa**, vaan se liittyy erityisesti johdon eristeessä etenevään sähkömagneettiseen aaltoon. Ominaisimpedanssi riippuu johtimien välisestä etäisyydestä, johdon poikkileikkauksen muodosta ja eristemateriaalista, mutta eipä juuri muusta! Tavallisin ominaisimpedanssi tietoliikenne- ja mittalaitteissa on  $50 \Omega$ , tietokoneverkoissa  $50 \Omega$  (koaksiaali) tai  $100 \Omega$  (kierretty pari johto, ethernet), antennijohdoissa  $60 \Omega$  tai  $75 \Omega$  (koaksiaali), joskus  $240 \Omega$  tai  $300 \Omega$

(lapamato). USB-kaapelin ominaisimpedanssiksi on spesifioitu  $90 \pm 7 \Omega$ .

Kun virta saavuttaa johdon loppupään, osa siitä menee vastukseen, mutta osa kimpoaa tai siis heijastuu takaisin kohti jännitelähdettä. Hetken kuluttua johdon alkupäässä tapahtuu jälleen uusi heijastus. Heijastuneet komponentit summautuvat johdolla ennestään olevien aaltojen kanssa. Tämä sykli jatkuu loputtomiin, mutta mittaustarkkuuden rajoissa loppuvirta  $i(\infty) = \frac{E}{R}$  saavutetaan kuitenkin hyvin nopeasti. Tämä tapahtuu siis iteratiivisen prosessin tuloksena. Ilmiötä on selitetty lähemmin alaluvussa 2.4. **Siiirtojohto** eli "transmissiolinjaa" (*transmission line*) on tarkasteltava omana passiivisena ja resiprookkisena komponenttinaan, joka toimii kuitenkin eri tavalla kuin vastus, kela tai kondensaattori.

Vain, jos johto ja kuorma ovat toisiinsa sovitettuja, eli  $R = Z_C$ , ei edestakaisia heijastuksia tapahdu. Virta saavuttaa tällöin heti lopullisen arvonsa. Johdon ollessa pitkä tai tarkasteltaessa hyvin nopeita pulsseja edestakaiset heijastukset on käytännössäkin otettava huomioon. Jos tarkastelujakso on pitkä, ovat alun edestakaiset heijastukset ehkä merkityksettömiä. Toisaalta erittäin lyhyen tarkastelujakson kuluessa edestakaiset heijastukset eivät ehkä vielä ole ehtineet tarkastelukohtaan. Monissa käytännön sovelluksissa oleellisempaa on heijastusten eliminointi *sovittamalla* pääteresistanssit kuin heijastustulosten tarkka analysointi.

## 1.2 Keskitetty komponentti vai jakautuneet suureet

Siiirtojohto voi olla mikä tahansa tavallinen johto (parijohto, koaksiaalikaapeli, mikroliuskajohto, ym.). Virran ja jännitteen aaltoluonne eli edestakaiset heijastukset on jaksollisella vaihtojännitteellä otettava huomioon aina, kun johdon pituus ylittää tietyn murto-osan aallonpituudesta. Virta ja jännite johdolla vaihtelevat tällöin ajan lisäksi myös paikan funktiona. Käytännössä raja voisi olla tilanteesta riippuen noin  $\lambda/50$  tai jopa  $\lambda/100$ ; usein esitetty raja-arvo  $\lambda/10$  on useimpiin käytännön tarkoituksiin liian löysä. Tätä tarkastellaan myöhemmin esimerkin voimin (kuva 22). Taulukkoon 1 on laskettu, miten pitkä johto ylittää ehdottamani rajan  $\lambda/50$ ; tätä pitemmällä johdoilla siiirtojohtoteorian käyttö on yleensä tarpeen, mutta joskus jo lyhyemmälläkin.

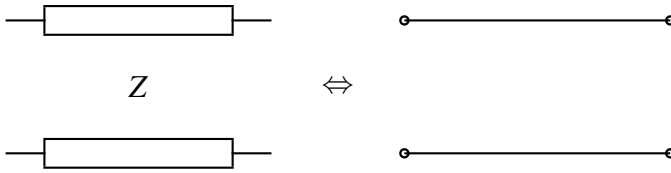
**Taulukko 1.** Aallonpituuden 50. osa eri taajuuksilla. Eristeen dielektrisyysvakioiksi on valittu keskisuuri arvo  $\epsilon_r = 4$ , mikä vastaa aallon etenemisnopeutena valonnopeuden puolikasta ( $v = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \lambda \cdot f$ ). Esimerkiksi teflonilla  $\epsilon_r = 2,1$ , tyypillisen koaksiaalikaapelin eristeellä se voi olla vain suuruusluokkaa  $\epsilon_r = 1,4$ . Viimeiseen sarakkeeseen on laskettu virran tunkeutumissyvyys kuparissa.

| Taajuusalue     | $f$     | $\lambda/50$ ( $\epsilon_r = 4$ ) | $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$ (Cu) |
|-----------------|---------|-----------------------------------|---|
| Verkkovirta     | 50 Hz   | 60 km                             | 9,3 mm  |
| Lankapuhelin    | 1 kHz   | 3 km                              | 2,1 mm  |
| Audio           | 20 kHz  | 150 m                             | 0,47 mm   |
| FM-radio        | 100 MHz | 3 cm                              | 0,007 mm  |
| WLAN, Bluetooth | 2,4 GHz | 1,2 mm                            | 0,001 mm  |

Pulssien tarkastelussa kriteerinä voidaan pitää pulssin nousuaikaa tai pulssin pituutta. Siirtojohtojatteluun tarvitaan yleisesti, jos pulssin nousuaika on lyhyempi kuin aallon edestakainen kulku-aika johdolla (vrt. kuva 13 jäljempänä). Tämä raja ei myöskään ole ehdottoman tarkka, mutta se kertoo suuruusluokan. Myös esim. tasajännitteen kytkennän yhteydessä voi vastaan tulla ilmiöitä, joiden ymmärtäminen edellyttää siirtojohtoteorian tuntemista.

Siirtojohtoteorian lisäksi varsinkin suurtaajuusalueella on otettava huomioon myös pyörrevirtailmiöstä johtuva virran ahtautuminen johtimen pinnan lähelle, mikä kasvattaa voimakkaasti johtimen resistanssia ja pienentää sen virtakestoisuutta. Jos taajuudella  $f = 50$  Hz tunkeutumissyvyys  $\delta \approx 9$  mm, voidaan arvioida, että yli 18 mm:n paksuisen johtimen voi tehdä ontoksi ilman että juurikaan hävittää virtakestoisuudessa tai resistanssin arvossa. Todellisuudessa pientä etua tulee, koska virta tunkeutuu myös tunkeutumissyvyyttä syvemmälle, tosin pinnalta lähtien eksponentiaalisesti heikentyneenä.

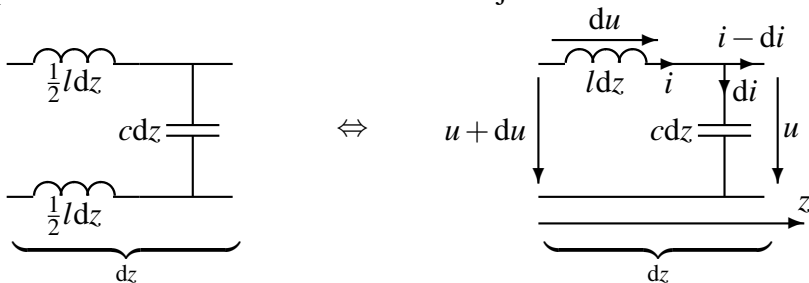
**Keskitetty** (*lumped*) komponentti tarkoittaa mitoiltaan niin pientä rakenneosaa tai johdinta, ettei siirtojohtoteoriaa tarvitse ottaa huomioon. Tässä tekstissä kaikki johtimet ovat lyhyitä, ellei sanaa *siirtojohto* erikseen mainita; myös muut komponentit ovat keskitettyjä. Keskitettyjen komponenttien vastakohtana ovat **jakautuneet** (*distributed*) suureet, kuten esimerkiksi siirtojohtossa johdon koko pituudelle jakautunut induktanssi ja kapasitanssi. Selvytyden vuoksi siirtojohtolle käytetään usein omaa piirrosmerkkiä (kuva 4):



**Kuva 4.** Siirtojohdon piirrosmerkki. Huomaa, että siirtojohto todellakin vastaa tavallista suoraa parihoitoa ominaisimpedanssista  $Z$  riippumatta. Merkitsemisen siirtojohdon päät usein renkailla erottamaan siirtojohtoa toisista siirtojohdoista tai keskitetyistä komponenteista.

### 1.3 Aaltoyhtälö, aalto ajan ja paikan funktiona

Siirtojohdon voidaan ajatella muodostuvan pitkästä ketjusta kuvan 5 kaltaisia elementtejä. Koska siirtojohdon sähkö- ja magneettikenttä oletetaan yleensä etenemissuuntaa vastaan kohtisuoraan  $xy$ -tasoon, on **etenemissuunnan** oltava  $z$ -akseli. Useimmissa siirtojohdoissa on kyseessä ns. **TEM-aalto** (poikittainen eli *transverse electromagnetic field*). Tärkein poikkeus tästä on johtavasta materiaalista valmistettu aaltoputki (*waveguide*), jossa **TE-** tai **TM-aalto** etenee eristeaineessa heijastuen vuorotellen sisäseinien välillä; putken poikkileikkaus on yleensä suorakaide, mutta se voi olla myös pyöreä. Mikroliuskapiireissä aallon **etenemismuoto** on niin sanottu **kvasi-TEM**; missä TEM-aproksimaatio on vielä riittävän tarkka, vaikka piiriin "herää" muitakin etenemismuotoja.



**Kuva 5.** Häviöttömän siirtojohdon pätkä (pituus  $dz$ ) mallinnettuna keskitetyillä komponenteilla. Koko johdolla  $l$  ja  $c$  ovat tasaisesti jakautuneet johdon pituudelle. Kelan puolikkaat voidaan yhdistää, kuten oikealla. Kuvan merkinnöillä virta ja jännite pienenevät  $di$ :n ja  $du$ :n verran  $dz$ :n matkalla.

Jännite- ja virta-aallon **etenemisnopeus**  $v$  ja niiden amplitudien suhde  $Z_C$  määräytyvät **Helmholtzin aaltoyhtälöstä**, joka johdetaan seuraavassa. Hyppää suoraan seuraavaan alalukuun, jos lukuisat osittaisderivaatat vievät yönesi! Voit halutessasi korvata osittaisderivaatan delta-merkin  $\partial$  tummalla derivaatan  $d$ :llä — **osittaisderivaatta** lasketaan täysin samalla tavalla kuin derivaattakin! Huomaa kuitenkin, että  $u$  ja  $i$  riippuvat ajan  $t$  lisäksi myös paikasta  $z$ , mikä selittää osittaisderivaatan käytön.

$$di = -\frac{\partial i}{\partial z} dz = \underbrace{c}_{C} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

$$du = -\frac{\partial u}{\partial z} dz = \underbrace{L}_{l dz} \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2)$$

Miinusmerkit tarvitaan, koska  $di$  ja  $du$  ovat positiiviset, mutta  $\frac{\partial i}{\partial z}$  ja  $\frac{\partial u}{\partial z}$  virran ja jännitteen pienenemisen takia negatiiviset. Yllä olevia **siirtojohdetyhtälöitä** kutsutaan myös **lennätinyhtälöiksi** (*telegrapher's equations*). Sama lyhyemmin:

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = c \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = l \frac{\partial i}{\partial t} \quad (4)$$

Aaltoyhtälön johtamiseksi derivoidaan yllä olevat yhtälöt ensin  $z$ :n ja sitten  $t$ :n suhteen.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial i}{\partial z} \right) = -c \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial z} \right) = -c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -l \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -l \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) \quad (6)$$

Koska derivointijärjestyksen saa vaihtaa, pätee:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial z} \right) \quad (7)$$

Eliminoimalla viime mainitut termit saadaan lopulliset aaltoyhtälöt, joissa miinusmerkit vihdoinkin kumoutuvat

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial i}{\partial z} \right) = lc \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = lc \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (9)$$

Yhdistämällä vielä derivoinnit **toiseksi derivaataksi** saadaan lopulliset **aaltoyhtälöt**:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = lc \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11)$$

Koska jännitteen ja virran aaltomuodot voivat käytännössä olla melkein mitä tahansa, on selvää, että yllä olevien differentiaaliyhtälöiden ratkaisuksi käy lähes mikä tahansa funktio. Jännitteen ja virran täytyy kuitenkin olla sekä  $t$ :n että  $z$ :n funktioita, jotta kyseinen derivaatta ei mene nolllaksi. Koska kuljettu matka on  $z = vt$ , on luontevaa valita funktion muuttujaksi  $t \pm \frac{z}{v}$ . Miinusmerkki vastaa positiivisen  $z$ -akselin suuntaan etenevää aaltoa ja plusmerkki negatiivisen  $z$ -akselin suuntaista aaltoa. Lauseke  $t - \frac{z}{v}$  pysyy vakiona, jos  $t$  ja  $z$  kasvavat samanaikaisesti. Esimerkiksi positiivisen  $z$ -akselin suuntaiset sinimuotoinen virta ja jännite olisivat tällöin:

$$i(t, z) = \hat{i} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad (12)$$

$$u(t, z) = \hat{u} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad (13)$$

## 1.4 Etenemisnopeus ja ominaisimpedanssi

Otetaan esimerkiksi sinimuotoinen tapaus. Tulokset voidaan sen jälkeen yleistää muillekin aaltomuodoille ja jopa pulsseille. Sijoitetaan virta tai jännite aaltoyhtälöön:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \hat{i} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \right) = lc \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \hat{i} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \right) \quad (14)$$

$$\frac{-\omega^2}{v^2} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] = -\omega^2 lc \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad (15)$$

$$v^2 = \frac{1}{lc} \quad (16)$$

koska sinin toinen derivaatta on  $-\sin$  täydennettynä sisäfunktion derivaatoilla. Tuloksesta nähdään, että  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  eli aallon nopeus on verrannollinen johdon induktanssiin ja kapasitanssiin pituusyksikköä kohden. Käytännön siirtojohdoissa eristeaine määrää aallon etenemisnopeuden ( $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ ). Koska useimmiten  $\mu_r = 1$ , supistuu kaava muotoon:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (17)$$

missä  $c_0$  on valon nopeus tyhjiössä. Sijoitetaan yllä olevat virran ja jännitteen funktiot vielä alkuyhtälöön:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left( \hat{i} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \right) = c \frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{u} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \right) \quad (18)$$

$$\frac{\omega}{v} \hat{i} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] = \omega c \hat{u} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad (19)$$

$$\frac{\hat{i}}{v} = c \hat{u} \Rightarrow \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{1}{vc} = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (20)$$

Jännitteen ja virran huippuarvojen suhde on sama kuin niiden tehollisarvojen suhde. Suhdetta nimitetään johdon **ominaisimpedanssiksi** eli **aaltovastukseksi** (*characteristic impedance*).

$$Z_C = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (21)$$

Häviöttömässä siirtojohdossa  $Z_C$  on reaaliluku. Kuten aallon nopeus, ominaisimpedanssikin riippuu yksinomaan johdon induktanssista ja kapasitanssista pituusyksikköä kohden. Huomaa, että  $Z_C$  ei liity mitenkään johdon sarjavastukseen — ideaalisen johdon sarjavastus on ominaisimpedanssista riippumatta nolla ja eristeen vastus ääretön.

Vaikka tarkastelu tehtiin esimerkkinä siniaallolle, pätevät  $v$ :n ja  $Z_C$ :n kaavat mille tahansa aaltomuodolle. Kirjallisuudessa aaltoyhtälöön sijoitetaan usein tarkemmin määrittelemätön funktio  $u(t, z) = u_1(t - z/v) + u_3(t + z/v)$ , missä heijastunut aalto  $u_3$  etenee tulevaa aaltoa  $u_1$  vastaan (vrt. luku 2). Derivaatan voi nyt laskea symbolisesti, esim.  $\frac{\partial}{\partial z} [u(t, z)] = -\frac{1}{v} (u_1'(t - z/v) - u_3'(t + z/v))$ . Toistamalla edellä tehty analyysi funktiolle  $u(t, z)$  saadaan samat tulokset kuin erikoistapauksena olleelle, mielestäni havainnollisemmalle siniaallolle.



## 1.5 Koaksiaalijohto ja parijohto

Tyypillisiä esimerkkejä siirtojohdoista ovat aiemmin käsitellyt **koaksiaalijohto** eli koaksiaalikaapeli ("koksi") ja parijohto. **Koaksiaalikaapelin** induktanssi ja kapasitanssi pituusyksikköä kohden sisä- ja ulkosäteen funktiona:

$$l = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_u}{r_s} \qquad c = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{r_u}{r_s}} \quad (22)$$

Ilmaeristeisellä koaksiaalijohdolla paras tehonsiirtokyky saavutetaan, kun  $Z_C \approx 30 \Omega$ , mutta paras jännitekestoisuus arvolla  $Z_C \approx 60 \Omega$  ja pienimmät johdinhäviöt, kun  $Z_C \approx 77 \Omega$ . Vähähäviöisten johtojen ja pienitehoisten laitteiden yhteydessä edellä olevat optimiarvot ovat luonnollisesti merkityksettömiä. Ammattielektronikassa tyypillinen siirtojohdon ominaisimpedanssi  $50 \Omega$  on alunperin näihin koaksiaalikaapelin ominaisuuksiin perustuva kompromissi. Antenniasennuksissa käytetty  $75 \text{ ohmin}$  arvo perustuu yllä mainittuun häviöiden minimointiin (hieman pyöristettynä).

**Parijohto**, jossa johtimien välinen etäisyys on  $2a$  ja johtimien säde  $r$ :

$$l = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{2a}{r} \qquad c = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{2a}{r}} \quad (23)$$

Molemmille rakenteille pätee siis:

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}} = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \qquad Z_C = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (24)$$

Ilmaeristeisessä johdossa aalto etenee valon nopeudella eli samalla nopeudella kuin tasoaalto ilmassa  $v = c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ . Tämä tieto on myrkkyä niille, jotka jaksavat inttää, ettei sähkövirta muka kulkisi valon nopeudella — varaukset eivät tosin kulje yhtä nopeasti!

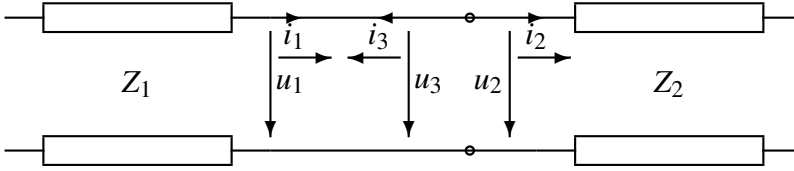
## 2 Heijastus- ja läpäisykerroin

### 2.1 Heijastuminen siirtojohtojen liitoskohdasta

Kaikenlaiset epäjatkuvuudet siirtojohdoissa vaikeuttavat signaalin kulkua. Siirtojohtojen yhteydessä puhutaan (jännitteen) heijastus- ja läpäisykerroista. Kun aalto saapuu kahden eri-impedanssisen siirtojohdon rajakohtaan, heijastuu osa aallosta takaisin lopun jatkaessa kulkuaan rajapinnan

toiselle puolelle. Merkitään tulevaa aaltoa (*incident*) alaindeksillä 1, läpäisyttä (*transmitted*) aaltoa alaindeksillä 2 ja heijastunutta (*reflected*) alaindeksillä 3. Määritellään **rajapintaehdot** kuvan 6 merkinnöin.

Huomaa, että liitoskohdan vasemmalla puolella kulkeva virta ja jännite koostuvat molemmat kahdesta osasta. Koska  $u_1$  ja  $u_3$  ovat eri jänniteaallot, ne täytyy laskea yhteen kerrostamismenetelmän tapaan (kuva 7). Molemmilla puolilla rajapintaa kokonaisjännite on tietysti sama. Virrat kerrostetaan eli *superponoidaan* myös. Siirtojohtoon ominaisimpedanssi määrää etenevän aallon jännitteen ja virran suhteen, eli  $i = u/Z$ .



**Kuva 6.** Aallon heijastuminen ja läpäisy siirtojohtojen rajakohdassa. Virtojen suunnat on valittu aaltojen fysikaalisten kulkusuuntien mukaan. Signaalilähde on kuvassa jossain vasemmalla puolella ja mahdollinen kuorma oikealla; yhden rajapinnan tarkastelussa niitä ei tarvitse ottaa huomioon. Siirtojohtoa merkitään usein paksunnetuilla johtimilla, kuten yllä; "patukat" eivät ole vastuksia.

$$i_1 - i_3 = i_2 \Rightarrow \frac{u_1}{Z_1} - \frac{u_3}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2} \quad (25)$$

$$u_1 + u_3 = u_2 \Rightarrow u_3 = u_2 - u_1 \quad (26)$$

$$\frac{u_1}{Z_1} - \frac{u_3}{Z_1} = \frac{\overbrace{u_1 + u_3}^{u_2}}{Z_2} \Rightarrow u_3 = \frac{\overbrace{Z_2 - Z_1}^{\rho}}{Z_2 + Z_1} \cdot u_1 = \rho u_1 = \Gamma u_1 \quad (27)$$

$$\frac{u_1}{Z_1} - \frac{\overbrace{u_2 - u_1}^{u_3}}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2} \Rightarrow u_2 = \frac{\overbrace{2Z_2}^{\tau}}{Z_2 + Z_1} \cdot u_1 = \tau u_1 \quad (28)$$

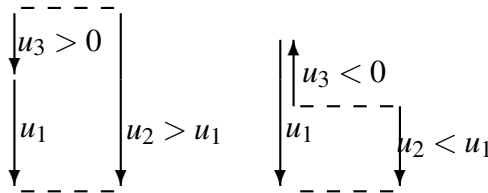
missä rho  $\rho = \Gamma$  (Gamma) on jännitteen tai virran **heijastuskerroin** ja  $\tau$  vastaavasti jännitteen (mutta ei virran) **läpäisykerroin**.

$$\rho = \Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{u_3}{u_1} \quad (29)$$

$$\tau = 1 + \rho = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{u_2}{u_1} \quad (30)$$

$$Z_2 = Z_1 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (31)$$

Usein ajatellaan, että virran heijastuskerroin on jännitteen heijastuskerroin vastakkaismerkkisenä, koska heijastuneen aallon suunta on tulevalle aal- lolle vastakkainen; ehkä on selvintä soveltaa käsitettä heijastuskerroin vain jännitteelle. Virtahan on aina jännite jaettuna joko siirto johdon ominaisim- pedanssilla tai kuorman resistanssilla tai impedanssilla.



**Kuva 7.** Jänniteaaltojen superponointi. Vasemmalla positiivinen heijastus- kerroin, oikealla negatiivinen. Huomaa, että positiivinen heijastus suurentaa rajapinnan läpäisyyttä jännitettä, mikä voi yllättää — virta ja teho kuitenkin pienenevät.

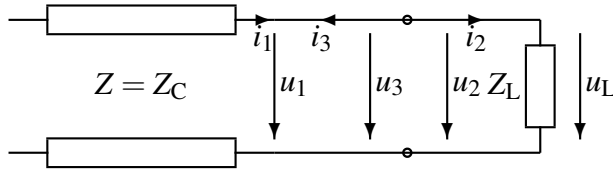
Koska teho on verrannollinen jännitteen neliöön, lasketaan läpäissyt teho kaavalla

$$P_2 = (1 - |\rho|^2)P_1 \quad (32)$$

Jos läpäissyt teho laskettaisiin läpäisykertoimen avulla, pitäisi myös im- pedanssitason muuttuminen ottaa huomioon. Vaikka kuvassa vasemmalla  $u_2 > u_1$ , on  $P_2 < P_1$ .

## 2.2 Aallon heijastuminen kuormasta

Heijastus- ja läpäisykertoimen kaavoja voidaan käyttää myös tilanteissa, joissa aalto saapuu johdon päässä olevaan keskitettyyn impedanssiin eli kuormaan (kuva 8). Kuormajännite on tällöin  $u_L = u_2 = \tau u_1$  ja heijastu- nut jännite  $u_3 = \rho u_1$ . Heijastus- ja läpäisykertoimen kaavat pätevät myös kompleksisille impedansseille, joita siis käytetään sinimuotoisten vaihto- virtojen yhteydessä.

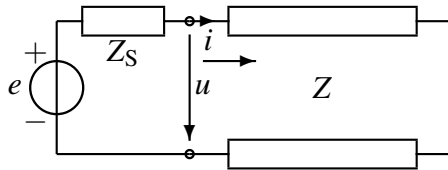


**Kuva 8.** Aallon heijastuminen keskitetystä kuormasta  $Z_L$ . Renkailla merkityn rajapinnan vasemmalla puolella on siirtojohto, mutta rajapinnan oikealla puolella johtimet oletetaan äärettömän lyhyiksi.

**Taulukko 2.** Heijastuskertoimen  $\rho$  ja läpäisykerroimen  $\tau$  arvoja, kun  $Z_1 = 50 \Omega$  tai  $Z_C = 50 \Omega$ . Taulukko pätee kahden siirtojohtoon ( $Z_1, Z_2$ ) rajapintaan tai siirtojohtoon ja kuormavastuksen rajapintaan ( $Z_C, Z_L$ , vrt. kuvat 6 ja 8). Kertoimet ovat laaduttomia lukuja.

| Kuorma $Z_L = R_L = Z_2$                      | $Z_2/\Omega$   | $\rho$         | $\tau = 1 + \rho$ | läpäissyt $u_2$ | heijastunut $u_3$ |
|---|----------------|----------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| Avoin pääte ( $Z_2 \gg Z_1$ )                 | $\infty$       | +1             | 2                 | $u_2 > u_1$     | $u_3 > 0$         |
| Suurehkompi vastus ( $Z_2 = 3Z_1$ )           | 150            | $+\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$     | $u_2 > u_1$     | $u_3 > 0$         |
| Suurehko vastus ( $Z_2 = 2Z_1$ )              | 100            | $+\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{3}$     | $u_2 > u_1$     | $u_3 > 0$         |
| Sovitettu pääte ( $Z_2 = Z_1$ )               | 50             | 0              | 1                 | $u_2 = u_1$     | $u_3 = 0$         |
| Pienuhkompi vastus ( $Z_2 = \frac{1}{2}Z_1$ ) | 25             | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$     | $u_2 < u_1$     | $u_3 < 0$         |
| Pienuhkömpi vastus ( $Z_2 = \frac{1}{3}Z_1$ ) | $\frac{50}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$     | $u_2 < u_1$     | $u_3 < 0$         |
| Oikosulku ( $Z_2 \ll Z_1$ )                   | 0              | -1             | 0                 | $u_2 = 0$       | $u_3 < 0$         |

Ääritapauksia ovat **avoimen piirin** heijastuskertoimen  $\rho = +1$  ja **oikosulun** heijastuskertoimen  $\rho = -1$ . **Sovitetun** kuorman ( $Z_L = Z_C$ ) heijastuskertoimen on nolla, mikä on yleensä optimi tilanne (taulukko 2).



**Kuva 9.** Johdolle lähtevä jänniteaalto määräytyy jännitteenjakajan kaavalla; heijastus- ja läpäisykerroimia ei saa käyttää silloin, kun aalto tulee keskitetystä komponentista, kuten jännitelähteestä. Kun aalto tulee siirtojohtolta (oikealta), voidaan läpäisykerrointa käyttää tässäkin  $Z_S$ :n jännitteen laskentaan.

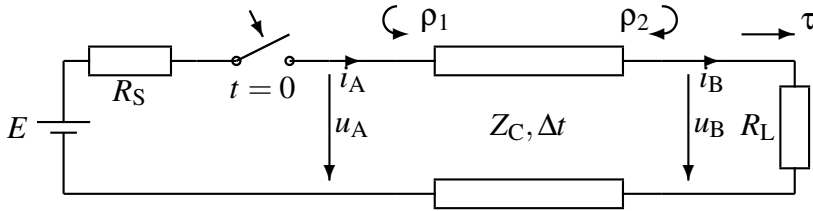
Johdon alkupäässä, missä jännite- tai virtalähde syöttää johdolle lähtevän aallon (kuva 9), ei läpäisykerrointa saa soveltaa. Johdolle lähtevä aalto

lasketaan jännitteenjakajan kaavalla, missä  $Z_S$  on lähteen sisäinen impedanssi ja  $e$  sähkömotorinen voima.

$$-e + Z_S i + Z i = 0 \quad (33)$$

$$u = Z i = \frac{Z}{Z_S + Z} e \quad (34)$$

**Esimerkki:** Liitetään tasajännitelähde piiriin hetkellä  $t = 0$  (kuva 10); lasketaan johdon alku- ja loppupään jännitteet  $u_A, u_B$  sekä virrat  $i_A, i_B$ , kun  $0 \leq t < \Delta t$ ,  $\Delta t \leq t < 2\Delta t$  tai  $t \geq 2\Delta t$ .  $E = 300 \text{ V}$ ,  $R_S = 50 \ \Omega$ ,  $R_L = 100 \ \Omega$ ,  $Z_C = 50 \ \Omega$ .



**Kuva 10.** Johdon alku- ja loppupään jännitteet ja virrat. Koska  $\rho_1 = 0$ , saavutetaan lopputilanne heti ensimmäisen heijastuksen palattua johdon alkukuun hetkellä  $t = 2\Delta t$ .

$$u_A(0) = u_A(\Delta t) = \frac{Z_C}{R_S + Z_C} E = 150 \text{ V} \quad \tau = \frac{2R_L}{Z_C + R_L} = \frac{4}{3} \quad (35)$$

$$\rho_1 = \frac{R_S - Z_C}{R_S + Z_C} = 0 \quad \rho_2 = \frac{R_L - Z_C}{R_L + Z_C} = \frac{1}{3} \quad (36)$$

$$u_B(\Delta t) = \tau u_A(0) = 200 \text{ V} = u_B(2\Delta t) \quad (37)$$

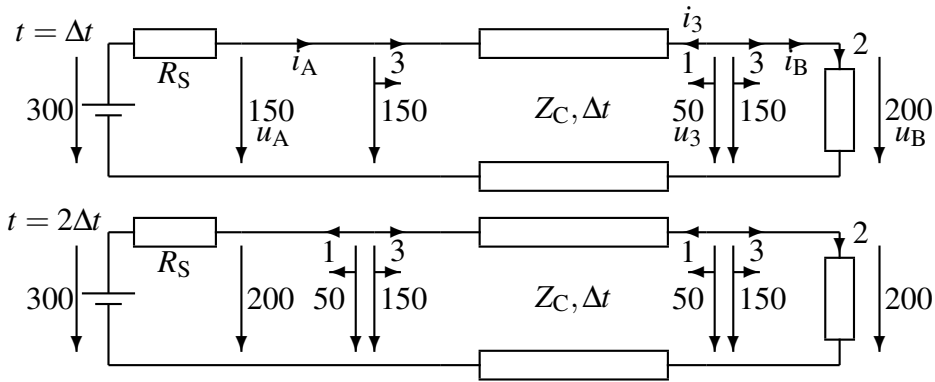
$$u_A(2\Delta t) = u_A(0) + \rho_2 u_A(0) + \rho_1 \rho_2 u_A(0) = 200 \text{ V} \quad (38)$$

Tulokset on laskettu kuvaan 11 ja oheiseen taulukkoon 3, missä

$$i_A = \frac{E - u_A}{R_S} \quad i_B = \frac{u_B}{R_L} \quad (39)$$

**Taulukko 3.** Esimerkin jännitteet ja virrat ajan funktiona.

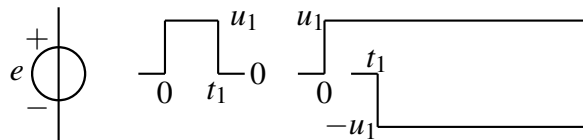
| $t$                           | $u_A(t)/\text{V}$ | $u_B(t)/\text{V}$ | $t$                           | $i_A(t)/\text{A}$ | $i_B(t)/\text{A}$ |
|-------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------------------|-------------------|-------------------|
| $t < 0$                       | 0                 | 0                 | $t < 0$                       | 0                 | 0                 |
| $0 \leq t < \Delta t$         | 150               | 0                 | $0 \leq t < \Delta t$         | 3                 | 0                 |
| $\Delta t \leq t < 2\Delta t$ | 150               | 200               | $\Delta t \leq t < 2\Delta t$ | 3                 | 2                 |
| $2\Delta t \leq t$            | 200               | 200               | $2\Delta t \leq t$            | 2                 | 2                 |



**Kuva 11.** Kuvaan on merkitty etenevät ja heijastuneet jänniteaallot hetkellä  $t = \Delta t$  (yllä) ja kun  $t = 2\Delta t$  (alla). Jännitenuolessa oleva vaakasuora nuoli kuvaa jänniteaallon etenemissuuntaa. Vasemmalle etenevä 50 voltin jänniteaalto on  $u_3 = \rho_2 u_A(0)$  ja  $i_3 = \frac{u_3}{Z_C} = 1$  A.

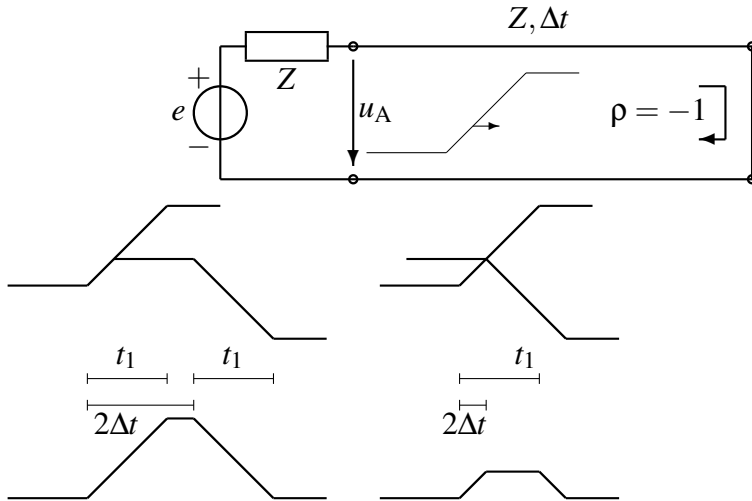
### 2.2.1 Pulssien koostaminen osista

Siirto johdoilla etenevät signaalit ovat käytännössä pikemminkin pulsseja kuin tasajännitemuotoisia **syöksyaaltoja**. Yksittäisen pulssin käsittelyyn on tavallinen tapa koostaa pulssi yksinkertaisemmista osista. Suorakaiteen muotoinen pulssi, jonka pituus on  $t_1$  ja korkeus  $u_1$  koostuu kahdesta osasta (kuva 12): hetkellä  $t = 0$  lähtevästä aallosta  $u_1$  ja hetkellä  $t = t_1$  lähtevästä aallosta  $-u_1$ . Molemmat aallot ovat kerran käynnistyttyään jatkuvia; vasta niiden yhteisvaikutuksesta pulssijännite nolautuu ajan  $t_1$  kuluttua. Aallot etenevät johdolla itsenäisinä ja heijastuvat johdon päistä toisistaan riippumatta. Myös Laplace-muunnosta voidaan käyttää siirtojohtopiiriin transientti-ilmiöiden käsittelyyn.



**Kuva 12.** Pulssin koostaminen kahdesta osasta. Negatiivinen pulssi kumoaa positiivisen pulssin hetken  $t_1$  jälkeen.

Tutkitaan seuraavaksi lähtevän ja takaisin heijastuneen pulssin resultanttia. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi johto alkupäästään sovitetuksi ja loppupäästään oikosuljetuksi. Tarkastellaan erityisesti pulssin nousevaa reunaa. Kuva 13 esittää jännitettä  $u_A$  ajan funktiona.



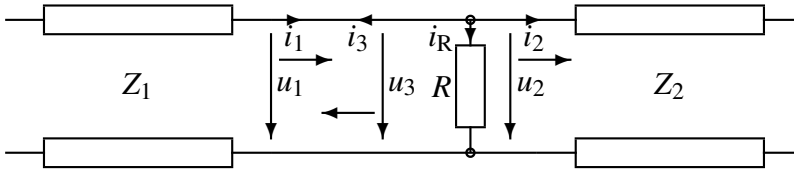
**Kuva 13.** Ylhäällä lähtevän ja palaavan aallon summautuminen kohdassa  $u_A$ . Vasemmalla  $t_1 < 2\Delta t$ , oikealla  $t_1 > 2\Delta t$ . Alempana on näiden resultantti. Koska  $u_A = \frac{Z}{Z+\bar{Z}}e$ , on jännitelähteen  $e$  aaltomuoto amplitudiltaan kaksinkertainen kuvan aaltomuotoihin nähden.

Jos pulssin nousuaika on lyhyempi kuin johdon kaksinkertainen kuluaika, ehtii johdolle lähteä täysikorkea pulssi, joka sitten mahdollisesti heijastuu johdon toisesta päästä (yleensä kuitenkin  $\rho \neq -1$ ).

## 2.3 Shuntti ja sarjavastus

### 2.3.1 Shunttivastus siirtojohtojen välissä

Kuva 14 esittää rinnakkaisvastusta eli shunttivastusta kahden siirtojohton liitoskohdassa. Käytännössä tämä voisi olla esimerkiksi liitoskohtaan kytetyn laitteen tuloresistanssi.



**Kuva 14.** Aallon heijastuminen ja läpäisy shunttivastuksen kohdalla. Johdolla  $Z_2$  etenevän aallon jännite on sama kuin vastuksen jännite ( $u_2 = u_R$ ), kunnes  $Z_2$ :n oikeanpuoleisesta päästä mahdollisesti heijastunut aalto on saavuttanut vastuksen.

Liitoskohdan tasapainoyhtälöt:

$$i_1 - i_3 = i_2 + i_R \Rightarrow \frac{u_1}{Z_1} - \frac{u_3}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2} + \frac{u_2}{R} \quad (40)$$

$$u_1 + u_3 = u_2 \quad (41)$$

Heijastus- ja läpäisykertoimen määrittely-yhtälöt:

$$u_3 = \rho u_1 \quad (42)$$

$$u_2 = \tau u_1 \quad (43)$$

Edellisen perusteella saadaan helposti johdettua  $\rho$  ja  $\tau$ :

$$\rho = \frac{(R||Z_2) - Z_1}{(R||Z_2) + Z_1} \quad (44)$$

$$\tau = 1 + \rho = \frac{2(R||Z_2)}{(R||Z_2) + Z_1} \quad (45)$$

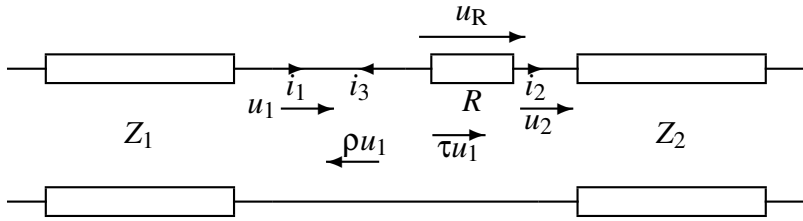
$$R||Z_2 = \frac{RZ_2}{R + Z_2} \quad (46)$$

Voidaan todeta, että tuleva aalto näkee mahdollisen shunttivastuksen rinnan seuraavan siirto johdon ominaisimpedanssin kanssa.

### 2.3.2 Sarjavastus siirtojohtojen välissä

Kuvassa 15 on keskitetty sarjavastus kahden siirto johdon välissä. Vastuksen tarkoituksena voi olla esimerkiksi vaimennus tai sovitin, tai se voi olla huonon liitoksen aiheuttama kontaktiresistanssi.





**Kuva 15.** Aallon heijastuminen ja läpäisy sarjavastuksen kohdalla. Jännitealoista on kuvaan merkitty vain etenemissuunta. Kirchhoffin jännitelain mukaan:  $u_1 = Ri_2 + u_2$ , missä  $i_2 = u_2/Z_2$ .

Nyt tasapainoyhtälöiksi tulee:

$$i_1 - i_3 = i_2 \Rightarrow \frac{u_1}{Z_1} - \frac{u_3}{Z_1} = \frac{u_2}{Z_2} \quad (47)$$

$$u_1 + u_3 = u_R + u_2 \quad (48)$$

Läpäisykerroin ei nyt kerro toiselle johdolle menevän aallon jännitettä:

$$u_3 = \rho u_1 \quad (49)$$

$$u_2 = \frac{Z_2}{R + Z_2} \tau u_1 \quad (50)$$

Heijastus- ja läpäisykertoimiksi saadaan:

$$\rho = \frac{(R + Z_2) - Z_1}{(R + Z_2) + Z_1} \quad (51)$$

$$\tau = 1 + \rho = \frac{2(R + Z_2)}{(R + Z_2) + Z_1} \quad (52)$$

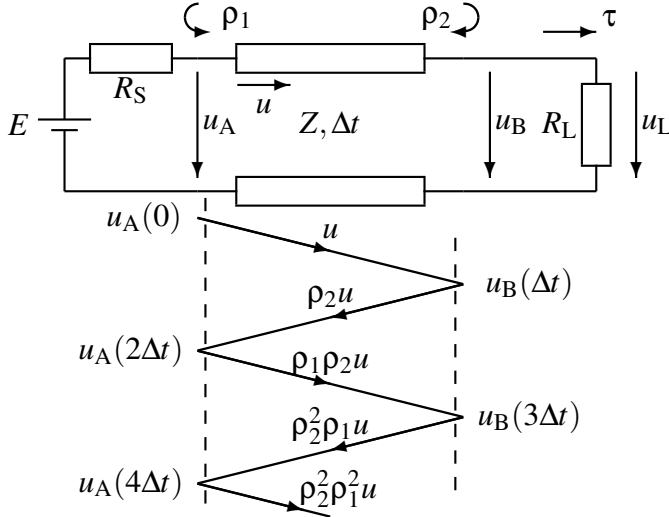
Tuleva aalto näkee vastuksen sarjassa jälkimmäisen siirtojohdon kanssa. Jännitteenjakajan takia kuitenkin vain osa läpäisseestä aallosta jatkaa johdolla  $Z_2$ .

$$u_2 = \frac{Z_2}{R + Z_2} \frac{2(R + Z_2)}{(R + Z_2) + Z_1} u_1 = \frac{2Z_2}{(R + Z_1) + Z_2} u_1 \quad (53)$$

Viimeinen esitysmuoto muistuttaa mukavasti läpäisykertoimen kaavaa, mutta huomaa, että sarjavastuksen takia poikkeuksellisesti  $u_2 \neq (1 + \rho)u_1$ . Lopputulokset voidaan varmistaa esimerkiksi energian säilymislain avulla.

## 2.4 Edestakaiset heijastukset

Edellä tarkasteltiin ainoastaan yksittäisen aallon käyttäytymistä rajapinnoissa. Käytännössä heijastuksia tapahtuu usein johdon molemmista päistä, jolloin lopullinen jännite saavutetaan asteittain **peräkkäisten heijastusten** tuloksena (vrt. alaluku 1.1). Tarkastellaan jännitteen portaittaista muuttumista tuloksena piirissä, jossa siirtojohdon päissä on jännitelähde ja vastus (kuva 16). Johdolle lähtee hetkellä  $t = 0$  aalto  $u$ , joka saavuttaa johdon loppupään lyhyen ajan  $\Delta t = s/v$  kuluttua ( $s =$  johdon pituus ja  $v =$  aallon etenemisnopeus johdolla eli valon nopeus kyseisessä eristeaineessa). Loppupäästä heijastunut aalto saavuttaa johdon alkupään hetkellä  $2\Delta t$ , jne. Johdon alku- ja loppupään jännitteet muuttuvat ajan funktiona, mutta lähestyvät nopeasti jatkuvan tilan arvoa  $u(\infty)$ , joka olisi voitu laskea suoraan keskitetyillä komponenteilla jättämällä siirtojohto välistä pois.



**Kuva 16.** Heijastusdiagrammi eli johdon alku- ja loppupään jännitteiden muodostuminen edestakaisten heijastusten tuloksena, kun jännitelähde kytketään hetkellä  $t = 0$  (sitä ennen  $E = 0$ ).

Johdolle lähtee siis aluksi aalto  $u = u_A(0)$ . Hetkellä  $t = \Delta t$  aalto saavuttaa johdon loppupään; osa siitä menee kuormaan, mutta osa heijastuu samanaikaisesti takaisin. Takaisin heijastunut osa saavuttaa johdon alkupään hetkellä  $2\Delta t$ . Tästä aallosta osa kuluu jännitelähteessä ja sen sisäisessä vastuksessa, mutta osa heijastuu samalla hetkellä takaisin. Lopulliset jännitteet johdon molemmissa päissä muodostuvat edestakaisten heijastusten tuloksena. Lasketaan ensin etenevä jänniteaalto  $u$ , heijastuskertoimet

johdon molemmissa päissä (johdon suunnasta tulevalle aallolle) ja kuorman läpäisykerroin:

$$u = u_A(0) = \frac{Z}{Z + R_S} E \quad \rho_2 = \frac{R_L - Z}{R_L + Z} \quad (54)$$

$$\rho_1 = \frac{R_S - Z}{R_S + Z} \quad \tau = \frac{2R_L}{R_L + Z} \quad (55)$$

Huomaa, että termi  $u_A(2\Delta t)$  sisältää johdolle jatkuvasti lähtevän aallon lisäksi loppupäästä heijastuneen osan ja lisäksi vielä alkupäästä uudestaan heijastuneen aallon:

$$u_A(2\Delta t) = u + \rho_2 u + \rho_1 \rho_2 u \quad (56)$$

$$u_A(4\Delta t) = u + \rho_2 u + \rho_1 \rho_2 u + \rho_1 \rho_2^2 u + \rho_1^2 \rho_2^2 u \quad (57)$$

$$= u + (1 + \rho_1) \rho_2 u + (1 + \rho_1) \rho_2^2 \rho_1 u \quad (58)$$

$$u_A(\infty) = (1 + \rho_1 \rho_2 + (\rho_1 \rho_2)^2 + (\rho_1 \rho_2)^3 + \dots)(1 + \rho_2) u \quad (59)$$

Jännite  $u_A(\infty)$  muodostaa **geometrisen sarjan**, jossa siis peräkkäisten termien suhde  $q$  on vakio. Tässä siis  $q = \rho_1 \rho_2$ . Matematiikasta tiedämme, että suppenevan geometrisen sarjan **summa** on:

$$(1 + \rho_1 \rho_2 + (\rho_1 \rho_2)^2 + (\rho_1 \rho_2)^3 + \dots) = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \rho_1 \rho_2} \quad (60)$$

$$\Rightarrow u_A(\infty) = \frac{1 + \rho_2}{1 - \rho_1 \rho_2} u_A(0) = \dots = \frac{R_L E}{R_L + R_S} \quad (61)$$

missä  $a_1$  on sarjan ensimmäinen termi. Kun lausekkeeseen sijoitetaan impedanssit, huomataan, että tulos on sopusoinnussa keskitetyillä komponenteilla lasketun tuloksen kanssa. Häviötön johto ei lopputilanteessa vaikuta jännitteenjakoon mitenkään. Tasavirtapiirissä lopputilanne nähdään lyhentämällä siirtojohtojen pituudet nolliin. Koska aalto kulkee johdolla samalla nopeudella kuin valo kyseisessä eristeaineessa, saavutetaan lopputila äärimmäisen nopeasti, ellei johto ole hyvin pitkä. Vastaavasti jännite  $u_B = u_L$ :

$$u_L(\Delta t) = \underbrace{\tau}_{1 + \rho_2} u \quad (62)$$

$$u_L(3\Delta t) = \underbrace{\tau}_{1+\rho_2} u + \underbrace{\tau}_{1+\rho_2} \rho_1 \rho_2 u \quad (63)$$

$$u_L \rightarrow (1 + \rho_1 \rho_2 + (\rho_2 \rho_1)^2 + \dots)(1 + \rho_2)u$$

Huomataan, että  $u_A(\infty) = u_B(\infty) = u_L(\infty)$ . Loppupään ja alkupään jännitteet saavuttavat lopullisen arvonsa vasta lukuisien edestakaisten heijastusten tuloksena; lyhyessä johdossa tämä tapahtuu silmänräpäyksessä — tosin nopeiden pulssien käsittelyssä sekin voi olla pitkä aika.

Jos jännitelähde olisi ollut sinimuotoinen, olisi heijastuneita osia summattaessa pitänyt ottaa myös vaihe-erot huomioon. Sinimuotoinen tapaus on kuitenkin helpompi käsitellä sitä varten johdetuilla yhtälöillä.

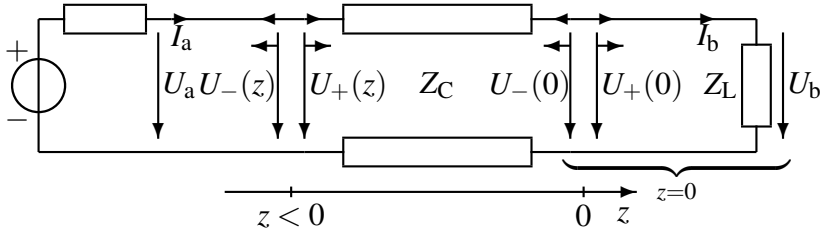
### 3 Sinimuotoiset aallot siirto johdoilla

Sinimuotoisessa tapauksessa rajoitetaan osoitinlaskennan hengen mukaisesti **jatkuviin sinimuotoisiin** virtoihin ja jännitteisiin. Pulseja tai kytkentäilmiöitä näin ei voida käsitellä, vaan ne on tarvittaessa laskettava edestakaisten heijastusten avulla. Heijastus- ja läpäisykertoimen kaavat pätevät siniaallolle ja resistiivisessä tapauksessa muillekin aaltomuodoille. Häviötömän siirto johdon ja passiivisen kuorman välinen heijastuskerroin on aina itseisarvoltaan ykköstä pienempi ( $|\rho| \leq 1$ ), mutta häviöllisellä johdolla näin ei välttämättä ole.

#### 3.1 Häviötön siirtojohto ja siniaalto

Johdolla eteneviä sinimuotoisia aaltoja summattaessa on otettava myös vaihe-erot huomioon, mutta käytännössä näitä tarkastellaan vain harvoin yksittäisinä aaltoina. Käytännön piirit toimivatkin yleensä jatkuvilla (lähes) sinimuotoisilla aalloilla, elleivät kyseessä ole suorakaiteen muotoiset digitaaliset pulssit. Myös digitaaliset signaalit on kuitenkin yleensä moduloitu sinimuotoiseen kantoaalttoon.

Johdolla vaikuttava jännite koostuu aina positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan etenevistä jänniteaalloista  $U_+$  ja  $U_-$  (kuva 17). Nämä tarkoittavat tässä jatkuvan tilan kokonaisjännitteitä, jotka ovat muodostuneet edestakaisten heijastusten tuloksena (kuva 18). Se, ovatko ne tehollisarvoja vai huippuarvoja, voidaan tarvittaessa sopia tapauskohtaisesti.



**Kuva 17.** Siirtojohtolla positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan etenevät sinimuotoiset jänniteaallot  $U_+$  ja  $U_-$  sekä johdon alku- ja loppupään kokonaisjännitteet  $U_a$  ja  $U_b$ . Pienet alaindeksit a ja b ovat tässä yhteydessä melko yleinen käytäntö, mutta niillä ei nyt ole samanlaista syntaktista merkitystä kuin elektroniikan signaalinkäsittelyssä. Virtojen  $I_+$  ja  $I_-$  suuntanuolet on merkitty vastaavien jänniteaaltojen yläpuolelle. Vaakasuuron  $z$ -akselin nollakohta on kuorman kohdalla ja muuttuja  $z$  saa johdolla yleisen käytännön mukaisesti negatiivisia arvoja; kuvassa  $z$ -akselin nollakohta on lisämerkintöjen takia venytetty laajemmalle alueelle.

**Kuva 18.** Kuva esittää samantaajuisia siniaaltoja, joiden amplitudit ja vaiheet vaihtelevat. Kun aallot summataan trigonometrian sääntöjen mukaisesti ottamalla myös vaihe-erot huomioon, saadaan tulokseksi siniaalto (paksu käyrä), jonka amplitudi ja vaihe määräytyvät summattavien aaltojen perusteella: samantaajuisien sinien summa on aina siniä amplitudista ja vaihe-eroista riippumatta (vrt. osoitinlaskenta). Tällainen tilanne vastaa esimerkiksi vasemmalta oikealle virtaavien edestakaisten heijastusten summaamista. Samanlainen tarkastelu voidaan tehdä oikealta vasemmalle virtaaville heijastuksille. Ensin mainittujen aaltojen resultanttia merkitään  $U_+$ :lla ja viime mainittujen summaa  $U_-$ :lla (tässä kirjassa molemmat ovat tehollisarvoja). *Seisovan aallon* tarkastelussa tullaan myöhemmin huomaamaan, että näiden eri suuntaan etenevien sinien summa ei enää kuitenkaan ole siniaaltoja.

## 3.2 Siirtojohtoyhtälöt

Voit huoletta siirtyä suoraan tuloksiin (83) ja sivuuttaa oheisen tarkastelun, ellei halua syventyä yksityiskohtiin. Oletetaan yleisen käytännön mukaisesti johto häviöttömäksi ja  $z$ -akselin suuntaiseksi. Siniaallon vaihe riippuu ajan  $t$  lisäksi paikasta  $z$  **vaihekertoimella**  $\beta$  (rad/m):

$$U_+(z) = U_+(0)e^{-j\beta z} \quad (65)$$

$$U_-(z) = U_-(0)e^{+j\beta z} \quad (66)$$

Yllä siis  $U_+(z)$  ja  $U_-(z)$  ovat oikealle ja vasemmalle etenevät aallot paikan  $z$  funktiona;  $z$  ei vaikuta aallon amplitudiin (häviötön johto), mutta se vaikuttaa vaiheeseen. Tiettyyn suuntaan etenevän aallon kuljettama virta kohdassa  $z$  lasketaan aallon jännitteestä ominaisimpedanssin määritelmän perusteella (vrt. Ohmin laki):

$$I_+(z) = \frac{U_+(z)}{Z_C} \quad (67)$$

$$I_-(z) = \frac{U_-(z)}{Z_C} \quad (68)$$

Kun johdon päässä on kuormaimpedanssi  $Z_L$ , on kuorman heijastuskerroin

$$\rho = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \quad (69)$$

Juuri tämä heijastus saa aikaan vastakkaiseen suuntaan etenevän aallon:

$$U_-(0) = \rho U_+(0) \quad (70)$$

Merkitään kohdan  $z = 0$  jänniteaaltoja jatkossa lyhyemmin:

$$U_+ = U_+(0) \quad U_- = U_-(0) \quad (71)$$

Tässä molemmat ovat tehollisarvoisia kompleksilukuja.

Seuraavassa johdetaan erittäin hyödylliset yhtälöt (83) ja (84) **jatkuvan tilan jännitteelle** ja **virralle** johdon alkupäässä (alaindeksi  $a$ ) tai etäisyydellä  $s = -z$  ( $z < 0$ ) kuormasta signaalilähteeseen päin:

$$U_a = U(z) = U_+(z) + U_-(z) = U_+ e^{-j\beta z} + \rho U_+ e^{+j\beta z} \quad (72)$$

$$I_a = I(z) = I_+(z) - I_-(z) = \frac{U_+ e^{-j\beta z}}{Z_C} - \frac{\rho U_+ e^{+j\beta z}}{Z_C} \quad (73)$$

Virran kaavassa oleva miinusmerkki johtuu palaavan aallon vastakkaisesta suunnasta; jännitteet summataan plusmerkillä, koska molemmilla aalloilla jännite on määritelty samaan suuntaan (ylhäältä alaspäin). Merkitään johdon loppupään ja kuorman virtaa  $I_b$ ; tällöin kuorman jännite  $U_b = Z_L I_b$ . Tasapainoehdon takia kuorman jännite on kaikkien tulevien ( $U_+$ ) ja heijastuneiden ( $\rho U_+$ ) jänniteaaltojen summa:

$$U_b = (1 + \rho)U_+ = \tau U_+ \quad (74)$$

$$U_+ = \frac{U_b}{\tau} = \frac{Z_L + Z_C}{2Z_L} U_b = \left( \frac{1}{2} + \frac{Z_C}{2Z_L} \right) U_b = \frac{U_b}{2} + \frac{Z_C I_b}{2} \quad (75)$$

$$\rho U_+ = \frac{\rho}{\tau} U_b = \frac{Z_L - Z_C}{2Z_L} U_b = \left( \frac{1}{2} - \frac{Z_C}{2Z_L} \right) U_b = \frac{U_b}{2} - \frac{Z_C I_b}{2} \quad (76)$$

Oikealla olevat lausekkeet ovat (sivumennen sanottuna) melkoisen yhden-  
näköiset sirontaparametrien määrittely-yhtälöiden kanssa. Sijoitetaan yllä  
olevat lausekkeet jännitteen ja virran yhtälöihin:

$$U_a = \left( \frac{U_b}{2} + \frac{Z_C I_b}{2} \right) e^{-j\beta z} + \left( \frac{U_b}{2} - \frac{Z_C I_b}{2} \right) e^{+j\beta z} \quad (77)$$

$$I_a = \left( \frac{U_b}{2} + \frac{Z_C I_b}{2} \right) \frac{e^{-j\beta z}}{Z_C} - \left( \frac{U_b}{2} - \frac{Z_C I_b}{2} \right) \frac{e^{+j\beta z}}{Z_C} \quad (78)$$

Kompleksisten eksponenttifunktioiden ja trigonometrinen funktioiden vä-  
liset yhteydet saadaan **Eulerin kaavasta**  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ .

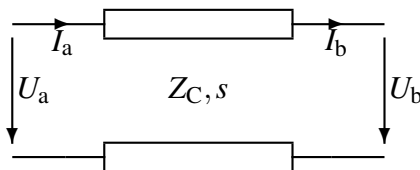
$$U_a = \frac{U_b}{2} \overbrace{\left( e^{+j\beta z} + e^{-j\beta z} \right)}^{2 \cos \beta z} + \frac{Z_C I_b}{2} \overbrace{\left( e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z} \right)}^{-2j \sin \beta z} \quad (79)$$

$$I_a = \frac{U_b}{2Z_C} \overbrace{\left( e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z} \right)}^{-2j \sin \beta z} + \frac{I_b}{2} \overbrace{\left( e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z} \right)}^{2 \cos \beta z} \quad (80)$$

Lausutaan vielä negatiivinen  $z$ -koordinaatti positiivisen etäisyyden  $s = -z$   
avulla:

$$\sin \beta z = \sin(-\beta s) = -\sin \beta s \quad (81)$$

$$\cos \beta z = \cos(-\beta s) = \cos \beta s \quad (82)$$



**Kuva 19.** Siirtojohtojännitteiden ja virtojen määrittely.

**Siirtojohtoyhtälöt** ovat jatkuvalle siniaallolle häviöttömässä johdossa siis seuraavat (vrt. kuva 19):

$$U_a = U_b \cos \beta s + jZ_C I_b \sin \beta s \quad (83)$$

$$I_a = j \frac{U_b}{Z_C} \sin \beta s + I_b \cos \beta s \quad (84)$$

missä  $s$  on johdon pituus ja  $\beta$  on **vaihekerroin** (yksikkö rad/m) eli **aaltoluku**. Aaltoluvun yksikkö olisi cgs-järjestelmässä rad/cm eli kayser. Jännitettä ja virtaa ei välttämättä tarvitse tarkastella juuri johdon päissä, vaan pisteet  $a$  ja  $b$  voidaan määritellä myös keskeltä johtoa.

On helppo huomata, että aallonpituuteen ( $\lambda$ ) nähden lyhyelle johdolle, jolle  $\beta s \approx 0$ , pätee:

$$U_a = U_b \quad (85)$$

$$I_a = I_b \quad (86)$$

Tulos ei yllätä ketään, mutta se ei siis päde pitkille johdoille! Tasavirralla jatkuvassa tilassa siirtojohtoyhtälöt olisivat myös tätä muotoa, koska  $\beta = 0$  — siksi yhtälöitä ei johdettu aiemmin.

Siirtojohtoyhtälöt määrittelevät siirtojohdon **ketjumatriisin**. Matriisimuotoisessa esityksessä on erityisen helppoa ratkaista loppupään jännite ja virta alkupään vastaavien suureiden funktiona käänteismatriisin avulla:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ I_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta s & jZ_C \sin \beta s \\ j \frac{1}{Z_C} \sin \beta s & \cos \beta s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_b \\ I_b \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\begin{bmatrix} U_b \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta s & -jZ_C \sin \beta s \\ -j \frac{1}{Z_C} \sin \beta s & \cos \beta s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ I_a \end{bmatrix} \quad (88)$$

Huomaa, että resiprookkisen piirin ketjumatriisin determinantti  $\Delta = \cos^2 \beta s + \sin^2 \beta s = 1$ , mikä yksinkertaisti käänteismatriisin muodostamista.

Kun induktanssi ja kapasitanssi ovat yleensä tasaisesti jakautuneet koko johdon pituudelle, ne voidaan lausua induktanssina ja kapasitanssina pituusyksikköä kohti ( $l$  ja  $c$ ). **Jakautuneet** (*distributed*) suureet ovat **keskitettyjen** (*lumped*) suureiden eli keskitettyjen komponenttien vastakohta. Ominaisimpedanssi  $Z_C$ , vaihekerroin  $\beta$  sekä johdolla etenevän aallon nopeus  $v$  (= valon nopeus kyseisessä eristeessä) riippuvat kaikki  $l$ :stä ja  $c$ :stä:

$$Z_C = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (89)$$



$$\beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{lc} \quad (90)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (91)$$

Häviöttömän johdon ominaisimpedanssi on reaaliluku (aaltovastus). Se kertoo johdolle kytketyn jännitteen ja johdolle lähtevän virran suhteen, ennen kuin virta on "käynyt katsomassa", mitä johdon toiseen päähän on kytketty. Yleisemmässä muodossa ominaisimpedanssi määritellään yhteen suuntaan etenevän aallon jännitteen ja virran suhteena. Ominaisimpedanssi kertoo siis myös johdon päästä heijastuneen palaavan aallon jännitteen ja virran suhteen, mutta se ei yleensä kerro kokonaisjännitteen suhdetta kokonaisvirtaan tietyllä kohdalla johtoa.

### 3.3 Siirtojohdon pituus ja viive

Johdon pituus voidaan esittää myös joko **metreinä**, **aallonpituuksina** tai **viiveinä**. Viive  $\Delta t$  tarkoittaa aallon kulku-aikaa (sekunteina) johdon päästä päähän.

$$\Delta t = \frac{s}{v} = s \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} \quad (92)$$

Fysiikan perusteiden mukaan

$$\omega = 2\pi f \quad (93)$$

$$v = \lambda f \quad (94)$$

missä lamda ( $\lambda$ ) on aallonpituus,  $\omega$  kulmataajuus ja  $f$  taajuus. Usein on käytännöllistä esittää johdon pituus **kulmana**  $\theta$ , joka voidaan suoraan sijoittaa pitkien johtojen yhtälöihin:

$$\theta = \beta s = \omega \Delta t \quad (95)$$

$$\theta = \frac{2\pi}{\lambda} s = 2\pi f \Delta t \quad (96)$$

$$\theta = \frac{360^\circ}{\lambda} s = 360^\circ f \Delta t \quad (97)$$

Huomaa, että kaksi ylempää kaavaa antavat  $\pi$ :n takia kulman radiaaneina. Tuloksia yhdistelemällä saadaan vielä seuraavat käytännön sovelluksissa

hyödylliset esitysmuodot:

$$\frac{s}{\lambda} = f \Delta t \quad (98)$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega \Delta t}{s} \quad (99)$$

$$v = \lambda f = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} \quad (100)$$

### 3.4 Siirtojohto muuttaa impedanssia

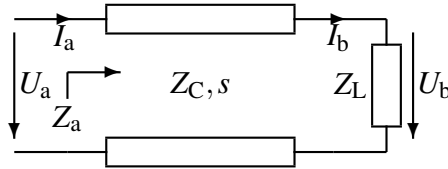
Tasavirtapiirissä johdon päässä oleva vastus näyttää jatkuvassa tilassa (edestakaisten heijastusten jälkeen) samanlaiselta johdon pituudesta riippumatta. Vaihtovirtapiirissä asia ei heijastuneiden aaltojen vaihe-erojen takia olekaan näin. Jännitteen ja virran avulla voidaan lausua johdon alkupäästä kuormaan päin näkyvä impedanssi  $Z_a$ . Huomaa, että  $I_b$  supistuu seuraavasta pois:

$$Z_a = \frac{U_a}{I_a} = \frac{\overbrace{U_b}^{Z_L I_b} \cos \beta s + j Z_C I_b \sin \beta s}{j \frac{U_b}{Z_C} \sin \beta s + I_b \cos \beta s} \quad (101)$$

$$= \frac{Z_L \cos \beta s + j Z_C \sin \beta s}{j Z_L \sin \beta s + Z_C \cos \beta s} Z_C \quad (102)$$

$$= Z_C \frac{\frac{Z_L}{Z_C} + j \tan \beta s}{1 + j \frac{Z_L}{Z_C} \tan \beta s} \quad (103)$$

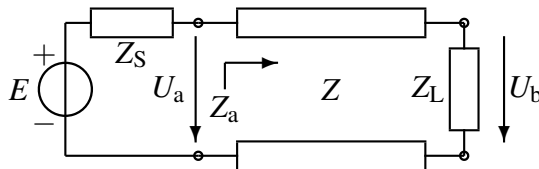
Vastus tai muu impedanssi näyttää johdon läpi katsottuna kompleksiselta impedanssilta, jonka arvo riippuu siirtojohdon pituudesta ja ominaisimpedanssista (kuva 20). Edellä oleva tulos (103) on tavallaan myös *Smithin kartan* määrittely-yhtälö (huomaa *normalisoidut* impedanssit  $\frac{Z_L}{Z_C}$ ). Smithin kartan avulla pystytään graafisesti ratkaisemaan samoja tuloksia kuin yllä olevalla  $Z_a$ :n yhtälöllä.



**Kuva 20.** Siirtojohdon (pituus  $s$ ) alkupäästä näkyvä impedanssi on  $Z_a$ ; kuormaimpedanssi  $Z_L$  näyttää ideaalisen johdon läpi katsottuna jatkuvassa tilassa (eli edestakaisten heijastusten jälkeisenä raja-arvona)  $Z_a$ :lta. On helppo osoittaa, että lyhyellä johdolla  $Z_a = Z_L$ .

Sinimuotoisella virralla voidaan siis melko helposti laskea, miten suurelta impedanssilta johdon loppupäässä oleva kuormaimpedanssi näyttää johdon alkupäästä katsottuna. Tämän impedanssin avulla saadaan esimerkiksi johdon alkupään jännite jatkuvassa tilassa (kuva 21) jännitteenjakajan kaavalla.

$$U_a = \frac{Z_a}{Z_S + Z_a} E \quad (104)$$



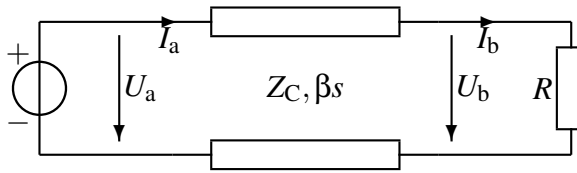
**Kuva 21.** Johdon alkupään jännite  $U_a$  jatkuvassa tilassa, kun johdon alkupäästä näkyvä impedanssi  $Z_a$  tunnetaan. Tässäkin pätee jännitteenjakajan kaava.

Käytännössä siirtojohtokäsittelyä tarvitaan suurtaajuuspiireissä ja mm. antennien yhteydessä. Pienilläkin taajuuksilla (50 Hz) siirtojohtoyhtälöt voivat olla välttämättömiä, jos johdot ovat hirmuisen pitkiä, kuten valtakunnallisessa sähköverkossa. Edellä mainittu raja ( $\lambda/50$ ) saavutetaan taajuudella 50 Hz ilmaeristeisen johdon ollessa 120 km pitkä. Muut eristeet pienentävät aallon nopeutta ja näennäisesti pidentävät johtoa kertoimella  $\sqrt{\epsilon_r}$ . Korkean taajuuden takia jopa matkapuhelimen sisällä on rakenteita, joiden toiminnan mallintaminen edellyttää siirtojohtoteorian käyttöä.

Johdon pituuden ja pääteimpedanssin  $Z_L$  vaikutusta on helppo testata lausekkeella:

$$U_a = U_b \left[ \cos \frac{2\pi}{\lambda} s + j \frac{Z_C}{Z_L} \sin \frac{2\pi}{\lambda} s \right] \quad (105)$$

yhtälön oikealla puolella oleva kerroin on yleensä kompleksinen ja itseisarvoltaan se poikkeaa ykkösestä. Tutkitaan jännitteen itseisarvon ja vaiheen muuttumista eripituisilla johdoilla; tätä ei esimerkiksi tavallisessa osoitinlaskennassa oteta huomioon. Lasketaan kuvan 22 piiristä jännite  $U_a$  olettaen, että  $U_b$  tunnetaan. Tulos riippuu pääteimpedanssin suuruudesta; oletetaan esimerkkitapauksena, että  $R = \frac{1}{2} Z_C$ . Tarkastellaan johtoja, joiden pituudet ( $s$ ) ovat: 0,  $\frac{\lambda}{50}$ ,  $\frac{\lambda}{20}$ ,  $\frac{\lambda}{10}$ ,  $\frac{\lambda}{4}$  ja  $\frac{\lambda}{2}$  (taulukko 4).



**Kuva 22.** Mitä vaikuttaa johdon pituus  $\beta s$ ?

Johdon pituuden kasvaessa jännite  $U_a$  alkaa poiketa yhä enemmän  $U_b$ :stä niin tehollisarvoltaan kuin myös vaiheeltaan.

**Taulukko 4.** Siirtojohdon pituuden vaikutus päätejännitteiden suuruuteen ja vaihe-eroon.

| $s$                                       | $\beta s = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot s$ | $U_a$                              |
|---|--|------------------------------------|
| 0   | $0^\circ$                                | $U_b \cdot 1 \angle 0^\circ$       |
| $\frac{\lambda}{50} = 0,02 \cdot \lambda$ | $7,2^\circ$                              | $U_b \cdot 1,02 \angle 14,2^\circ$ |
| $\frac{\lambda}{20} = 0,05 \cdot \lambda$ | $18^\circ$                               | $U_b \cdot 1,13 \angle 33,0^\circ$ |
| $\frac{\lambda}{10} = 0,10 \cdot \lambda$ | $36^\circ$                               | $U_b \cdot 1,43 \angle 55,5^\circ$ |
| $\frac{\lambda}{4} = 0,25 \cdot \lambda$  | $90^\circ$                               | $U_b \cdot 2,0 \angle 90,0^\circ$  |
| $\frac{\lambda}{2} = 0,50 \cdot \lambda$  | $180^\circ$                              | $U_b \cdot 1,0 \angle 180,0^\circ$ |