Tieteellinen esitystapa:

Lämmittelykysymys: Kuinka suuri on Marsin ja auringon välinen etäisyys?

A) $2,27 \cdot 10^{10}$ m

B) $2,27 \cdot 10^{11}$ m

C) $2,27 \cdot 10^{12}$ m

Aika vaikea sanoa jos ei nyt heti löydy muistista!

Palaamme asiaan...

Mikä ero lausahduksissa?

"Marsin ja auringon välinen etäisyys on 1,52 AU."

ja

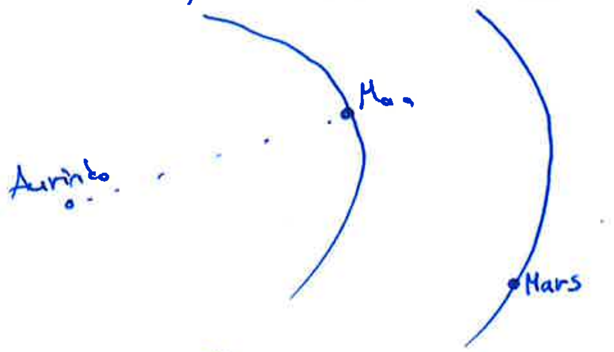
"Marsin ja auringon välinen etäisyys on 227'388'763'403,2 m."

(1 AU = Maan ja auringon välinen keskimääräinen etäisyys
= 149'597'870'660 m)

Mikä ero?

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,52 \text{ AU} \\ 2,27 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{array} \right. \quad ?$$

Mitä kertoja haluaa välittää?



1,52 AU havainnollistaa Maan ja Marsin kiertoratojen suhteen.

(Alun lämmittelykysymys:
$$\left\{ \begin{array}{l} 0,152 \text{ AU} \\ 1,52 \text{ AU} \\ 15,2 \text{ AU} \end{array} \right. \quad \text{helpompi!}$$
)

Toisaalta: Aurinko $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2,27 \cdot 10^{11}\text{ m}}$ Mars — valolta kuluu aika $\dfrac{2,27 \cdot 10^{11}\text{ m}}{3 \cdot 10^{8}\text{ m/s}} \approx 7 \cdot 10^{2}\text{ s} \approx \underline{12 \text{ min}}$

Yksiköt ja dimensiot

Vapaus valita suureen (esim. Marsin ja auringon välinen etäisyys) esityksen yksikkö (metri, AU, valosekunti, tuuma, merimaili....)

Kaikilla mahdollisilla yksiköillä oltava kuitenkin sama dimensio (yo. esimerkissä "pituus")

Dimensiot ovat:

- pituus L
- massa M
- aika T
- lämpötila Θ

riittävät meidän kurssillamme

- varaus Q

Joskus vielä lisätään ainemäärä ja valovoima.

> Jokainen fysikaalinen suure, muuttuja ja luonnonvakio on näiden dimensioiden potenssien tulo.

Esim.

Voima $$[F] = \frac{ML}{T^2} = M^1 L^1 T^{-2}$$

tiheys $$[\rho] = \frac{M}{L^3} = M^1 L^{-3}$$

Newtonin gravitaatiovakio $$[\gamma] = \frac{[F]}{[m^2]} \cdot [r^2] = \frac{MLT^{-2}}{M^2} L^2 = M^{-1} L T^{-2}.$$

Kaikki fysiikan yhtälöt ovat dimensionaalisesti homogeeniset:

"putoavan kappaleen korkeus h ajanhetkellä t on:

$$h(t) = a + \frac{b}{c} \cdot \ln(\cosh(ct))$$

• yhtälön molemmilla puolilla oltava sama dimensio

$$\underbrace{[h(t)]}_{L} = \underbrace{\left[a + \frac{b}{c} \ln(\cosh(ct))\right]}_{L}$$

• yhteenlaskettavilla oltava sama dimensio

$$= \underbrace{[a]}_{L} + \underbrace{\left[\frac{b}{c} \cdot \ln(\cosh(ct))\right]}_{L}$$

• funktioiden argumentit ovat dimensiottomia (poislukien potenssifunktiot)

$$\Rightarrow \ln(\cosh(\underbrace{ct}_{[ct]=1}))$$

• tulon dimensio = dimensioitten tulo

$$[ct] = [c]\underbrace{[t]}_{T} = 1 \Rightarrow [c] = \frac{1}{T} = T^{-1}.$$

$$\Rightarrow h(t) = a + \frac{b}{c} \ln(\cosh(ct))$$

$$[a] = L \qquad \left[\frac{b}{c}\right] = \frac{[b]}{[c]} = \frac{[b]}{T^{-1}} = \underbrace{[b] \cdot T}_{\text{oltava } L} \Rightarrow [b] = \frac{L}{T}.$$

Trinity ja Taylor

Ydinräjähdyksen energia E ; $[E] = [J] = \left[\frac{kgm^2}{s^2}\right] = \frac{ML^2}{T^2}$

Oleellisia suureita:

tulipallon säde	r ;	$[r] = L$
aika	t ;	$[t] = T$
ilmantiheys	ρ ;	$[\rho] = M/L^3$.

Yleisesti

$$E = f_1(r, \rho, t) \quad ; \quad f_1 \text{ tuntematon funktio}$$

$[E] = \frac{ML^2}{T^2}$, massa M esiintyy oikealla puolella vain ilmantiheydessä ρ

$\Rightarrow$ oltava

$$f_1(r, \rho, t) = \rho \cdot \underbrace{f_2(r, t)}_{\text{jokin uusi tuntematon funktio}}$$

$\Rightarrow$

$$E = \rho \cdot f_2(r, t)$$

$[E] = \frac{ML^2}{T^2}$, aika ainoastaan muuttujassa t oikealla puolella

$$\Rightarrow \quad f_2(r, t) = \frac{1}{t^2} \cdot \underbrace{f_3(r)}_{\text{taas uusi tuntematon funktio}}$$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{\rho}{t^2} \cdot \underbrace{f_3(r)}_{r \text{ ei dimensioton}} \Rightarrow f_3 \text{ oltava potenssifunktio}$$

$$\Rightarrow f_3(r) = C \cdot r^{\alpha} \quad \leftarrow \text{jokin potenssi}$$

C: dimensioton vakio

$$\underbrace{[E]}_{\frac{\cancel{M}L^2}{\cancel{T^2}}} = \underbrace{\left[\frac{\rho}{t^2} C \cdot r^{\alpha}\right]}_{\frac{\cancel{M}}{L^3} \cdot \frac{1}{\cancel{T^2}} \cdot L^{\alpha}} \Rightarrow L^2 = L^{\alpha - 3} \Rightarrow \alpha = 5.$$

$$\Rightarrow \quad E = C \cdot \frac{r^5 \rho}{t^2}$$

Taylor arvioi: $C \approx 1$

Kuvasta

$t = \cancel{0{,}016\,s}$ $0.025\,s$

$r = \cancel{100\,m}$ $130\,m$

$\rho = 1.1\,kg/m^3$

$$\rightarrow E \approx \cancel{4 \cdot 10^{13}\,J} \approx \cancel{10\,kT(TNT)}$$

$6{,}5 \cdot 10^{13}\,J$ $\quad$ 16 kT(TNT)

Mistä suureista loppunopeus siis riippuu?

$V_{max}(y_0, g)$

y_0 ← alkukorkeus, g ← putoamiskiihtyvyys

2:n muuttujan funktio!
(jos haluamme että myös g voi vaihtua)

<u>Esim.</u> Mars-mönkijän pudotus

V_{max} ?

Oleellisia ~~muuttujia~~ suureita

g (nyt Marsissa!), $[g] = L/t^2$

y_0, $[y_0] = L$

m (mönkijän + varjon massa) $[m] = M$

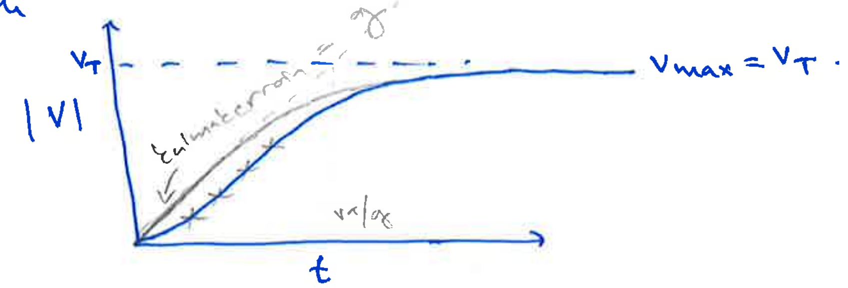
ρ (ilmakehän tiheys) $[\rho] = \frac{M}{L^3}$

d (laskuvarjon halkaisija) $[d] = L$

Eli

$V_{max}(d, g, m, \rho, y_0)$ viiden muuttujan funktio!
huh!

Tiedetään että ilmanvastuksen vuoksi putoava mönkijä saavuttaa terminaalinopeuden jo kauan ennen pintaan osumista, eli



$\Rightarrow$ <u>V_{max} ei riipu</u> <u>pudotuskorkeudesta</u> jos <u>y_0</u> <u>tarpeeksi suuri</u>.

Oletetaan siis näin!

Edelleen neljä muuttujaa!

aikadimensio t vain putoamiskiihtyvyydessä g.

$$V_{max}(d, g, m, \rho) = F(d, g, m, \rho)$$

nopeus, dimensio $\frac{L}{t}$

mielivaltainen funktio

oltava

jälleen mielivaltainen funktio mutta nyt vain kolme muuttujaa!

$$F(d, g, m, \rho) = \underbrace{\sqrt{g}}_{\text{aikadimensio } \frac{1}{t}} \cdot G(d, m, \rho)$$

$\Rightarrow$

$$V_{max}(d, g, m, \rho) = \sqrt{g}\, G(d, m, \rho)$$

ei massan dimensiota

massan dimensio esiintyy vain m:ssä $([m] = M)$ ja tiheydessä $([\rho] = M/L^3)$

massojen pitää kumoutua funktiossa G

$\Rightarrow$ m ja ρ pitää esiintyä pareina, esim. $\frac{\rho}{m}$.

$\Rightarrow$

$$V_{max}(d, g, m, \rho) = \overset{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}\, \underbrace{G\left(d, \frac{\rho}{m}\right)}_{\text{on oltava } \sqrt{L}}$$

pituuden dimensio L

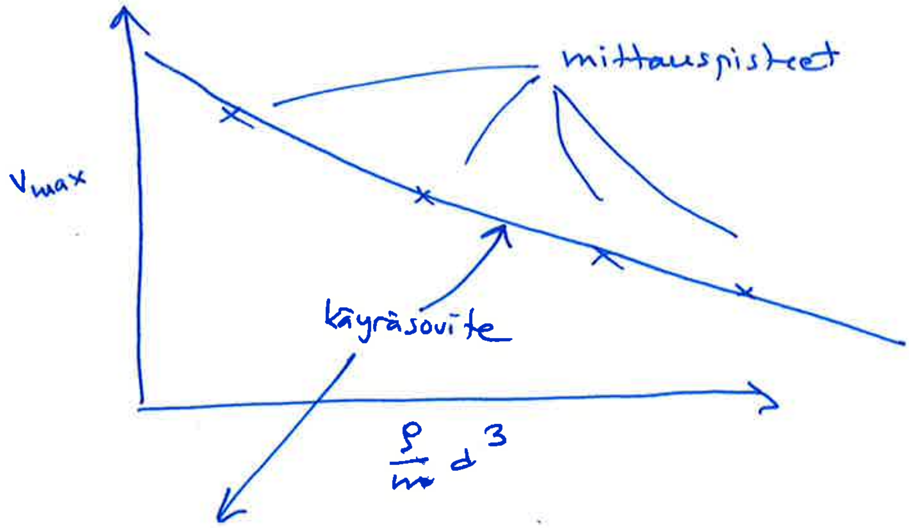
on oltava $\sqrt{L}$, esim.

$$G\left(d, \frac{\rho}{m}\right) = \sqrt{d}\, \underbrace{\mathcal{F}\left(\overbrace{\frac{\rho}{m} d^3}^{\text{dimensioton}}\right)}_{\text{mielivaltainen yhden muuttujan funktio.}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{max}(d, g, m, \rho) = \sqrt{gd}\, \mathcal{F}\left(\frac{\rho}{m} d^3\right)}$$

Mitä olemme saavuttaneet?

Alkuperäinen neli-/~~4~~ulotteinen ongelma on nyt 1-ulotteinen. Tekemällä sarjan mittauksia joissa varioidaan muuttujaa $\frac{\rho}{m} d^3$ (esimerkiksi varioimalla massaa) voidaan päätellä kaikki funktiosta $V_{max}(d, g, m, \rho)$!



$$\mathcal{F}_{sovite}\left(\frac{\rho}{m} d^3\right) = \frac{1}{\sqrt{gd}} \cdot V_{max}(d, g, m, \rho)$$

$$\Rightarrow \quad V_{max}(d, g, m, \rho) = \sqrt{gd}\, \mathcal{F}_{sovite}\left(\frac{\rho}{m} d^3\right)$$

Ilman dimensioanalyyttistä tarkastelua olisi funktion $V_{max}(d, g, m, \rho)$ taulutointi/sovitus todella vaikeaa:

"yksiulotteisen funktion taulutointi" → 1 sivu
"kaksiulotteisen ——— " ——— " → 1 kirja
"kolmiulotteisen ——— " ——— " → 1 kirjahylly
"neliulotteisen ——— " ——— " → 1 kirjasto!

Stefan – Boltzmann law (mustan kappaleen säteily)

Säteilyn intensiteetti I

riippuu lämpötilasta T.

Mutta $[I] = \left[\frac{W}{m^2}\right] = \left[\frac{J}{sm^2}\right] = \frac{M \cdot L^2/t^2}{t \cdot L^2} = \frac{M}{t^3}$.

$[T] = T$.

Täytyy riippua muistakin parametreista.

Luonnonvakiot c, $\hbar$, k_B

valonnopeus (→ c), Planckin vakio (→ $\hbar$), Boltzmannin vakio (→ k_B)

$[c] = L/t$

$[\hbar] = [Js] = \frac{ML^2}{t^2} \cdot t = \frac{ML^2}{t}$

$[k_B] = [J/K] = \frac{ML^2}{t^2} \cdot \frac{1}{T}$

Dimensiottomat yhdistelmät:

$[Ic^2] = [E/t^3] \Rightarrow [Ic^2\hbar^3] = [E^4]$

$[k_B T] = [E]$

$\Rightarrow$ vain yksi kombinaatio:

$$\left[\frac{Ic^2\hbar^3}{(k_B T)^4}\right] = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \underbrace{\alpha}_{\text{dimensioton vakio}} \cdot \frac{(k_B T)^4}{c^2\hbar^3}}$$

Stefan – Boltzmannin laki:

$$I = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 \hbar^3} \cdot T^4$$