Dynaamisten systeemien teoriaa

Systems analysis laboratory II

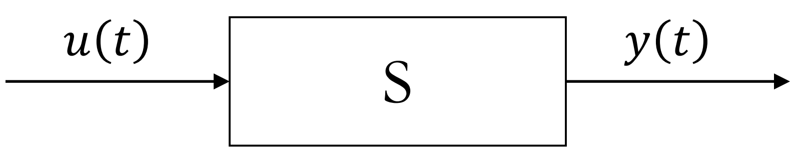
9.11.2020

Vakiot, sisäänmenot, ulostulot ja häiriöt

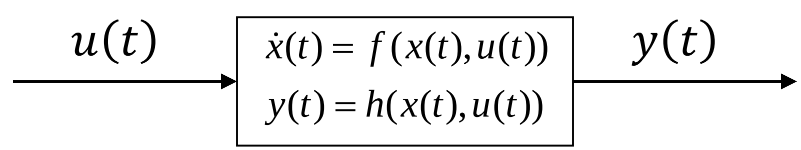
- Mallin vakiot
  - Systeemiparametrit
    - annettuja vakioita, joita ei muuteta; esim. painovoiman kiihtyvyys
  - Suunnitteluparametrit
    - suunnitteluparametreja voidaan muuttaa; esim. kappaleen massa
- Mallin muuttujat
  - Ulostulot (output) $y(t) = \left[y_1(t), \ldots, y_p(t)\right]^T$
  - Sisäänmenot/ohjaukset (input) $u(t) = [u_1(t), \ldots, u_m(t)]^T$
    - voidaan valita
  - Häiriöt $w(t) = [w_1(t), \ldots, w_r(t)]^T$
    - ei voida valita
- Dynaamisessa systeemissä $y(t)$ riippuu paitsi $u(t)$:stä ja $w(t)$:stä myös kaikista $u(s)$ ja $w(s)$, $s < t$
  - Systeemillä on muisti

Tila

- Dynaamisen systeemin ulostuloon $y(t)$ vaikuttavat $u(s)$ ja $w(s)$, $s < t$
  - Olisi kovin kömpelöä tallettaa $u(s)$ ja $w(s)$ kokonaisuudessaan
- Systeemin (tai mallin) tila $x(t)$ on sellainen informaatio, jonka tunteminen yhdessä $u(s)$:n ja $w(s)$:n ($s \in [t, \tau]$) kanssa mahdollistaa systeemin ulostulon $y(\tau)$ laskemisen jollekin $\tau > t$
- Käytännössä tilalla on tärkeä merkitys esim. simuloinnissa: se on suoraan kullakin aika-askelella talletettava informaatio



input-output-kuvaus
(external model)



tilamalli
(internal model)

Input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli

- Yleinen jatkuvan ajan n. kertaluvun (SISO) input-output-kuvaus on muotoa
  $$g\left(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), u^{(m')}(t), \dots, u(t)\right) = 0, n \geq m',$$
  missä (a) viittaa a. derivaattaan ja g on jokin epälineaarinen funktio
- Muunnetaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi asettamalla $x_i(t) \coloneqq y^{(i-1)}(t), i = 1, \dots, n$ (ei onnistu aina)
- Tilayhtälömalli

  $\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big)$ Tilayhtälö / state equation

  $y(t) = h\big(x(t), u(t)\big)$ Ulostuloyhtälö / output equation

  jossa $\dim x(t) = n$, $\dim u(t) = m$, $\dim y(t) = p$
- $x(t)$ on mallin tila, n on mallin kertaluku

Lineaarinen input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli

- Yleinen jatkuvan ajan n. kertaluvun lineaarinen (SISO) input-output-kuvaus on muotoa
  $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + y(t) = b_{m'} u^{(m')}(t) + \ldots + b_0 u(t)$,
  missä $n \geq m'$ ja (a) viittaa a. derivaattaan
- Muunnetaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemiksi asettamalla $x_i(t) \coloneqq y^{(i-1)}(t), i = 1, \ldots, n$ ja tekemällä tarvittaessa muita kikkoja
- Lineaarinen tilayhtälömalli

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

  - $\dim A = n \times n$ (systeemimatriisi /system matrix)
  - $\dim B = n \times m$ (ohjausmatriisi / control matrix)
  - $\dim C = p \times n$ (lähtömatriisi / ouput matrix)
  - $\dim D = p \times m$ (suoravaikutusmatriisi/feedforward matrix)

Laplace-muunnos

- Funktion $f(t)$ ($f(t) = 0$, kun $t < 0$) Laplace-muunnos on
  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
  missä s on kompleksimuuttuja (”taajuus”)

<u>Funktio</u>	<u>L-muunnos</u>
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
…	…

- Dynaamisten systeemien yhteydessä tyypillisesti oletetaan
  $$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = 0$$
  – ”linearisoidun mallin alkutila = tasapainopiste/linearisointipiste”
  => tilan poikkeama tasapainosta = 0
- Muista: $f^{(n)}(t) \Rightarrow s^n F(s)$

Siirtofunktio

- Yleinen jatkuvan ajan lineaarinen input-output-kuvaus
  $a_n y^{(n)}(t) + \cdots + y(t) = b_m u^{(m)}(t)+\ldots+b_0 u(t),\ n \geq m$
- Laplace-muunnetaan puolittain =>
  $$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + 1} U(s)$$
  Osamäärää kutsutaan systeemin siirtofunktioksi $G(s)$
- Dynaamisten systeemien eräs mallityyppi
- Algebrallinen yhtälö (vrt. differentiaaliyhtälö)
- Kompleksiarvoinen kompleksimuuttujan funktio
  - Taajuustaso(Laplace-taso)malli (vrt. aikatasomalli)
- Siirtofunktion nimittäjäpolynomin nollakohtia kutsutaan siirtofunktion navoiksi

Lineaarista tilayhtälömallia vastaava siirtofunktio

- Lineaarinen tilayhtälömalli

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

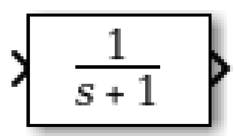
- Laplace-muuntamalla saadaan

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

- Algebralista vääntöä…

$$G(s) = \frac{(\dots)}{(\dots \det(sI - A) \dots)}$$

- Siirtofunktion navat yhtyvät A:n ominaisarvoihin
- Simulink: Transfer Fcn



Tasapainotila ja -piste

- Valitaan $u(t) = u_0$ (vakio); mihin $x(t)$ ja $y(t)$ asettuvat vai asettuvatko mihinkään?
- Tasapainotila x_0: $f(x_0, u_o) = 0$
  - yksi, useita tai ei yhtään ratkaisua
- (x_0, u_0) on tasapainopiste
  - usein toivottavaa saada systeemi tasapainotilaan
- Tasapainopisteen ulostulo on $y_0 = h(x_0, u_0)$
- Lineaarisessa tapauksessa
  - origo $(0, 0)$ on aina systeemin tasapainopiste
  - jos (x_0, u_0) on tasapainopiste, myös (kx_0, ku_0) on kaikilla $k \in \mathbb{R}$
  - jos A on kääntyvä, jokaiselle ohjaukselle u_0 löytyy tasan yksi tasapainotila $x_0 = -A^{-1}Bu_0$

Linearisointi

- Tarkastellaan epälineaarista systeemiä (vrt. dia ”*Input-output -kuvaus ja tilayhtälömalli*”) tasapainopisteessä (x_0, u_0) sekä poikkeamia $\Delta x(t) = x(t) - x_0$, $\Delta y(t) = y(t) - y_0$ ja $\Delta u(t) = u(t) - u_0$
- Pätee:

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) \approx A'\Delta x(t) + B'\Delta u(t)$$
$$\Delta y(t) \approx C'\Delta x(t) + D'\Delta u(t)$$

missä

$$A' = \frac{\partial f}{\partial x}, B' = \frac{\partial f}{\partial u}, C' = \frac{\partial h}{\partial x}, D' = \frac{\partial h}{\partial u}$$

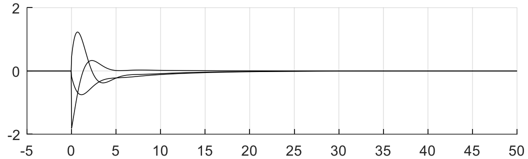
laskettuna (x_0, u_0):ssa

- Linearisoitua mallia hyödynnetään esim. epälineaarisen systeemin stabiilisuus- ja ohjattavuustarkasteluissa

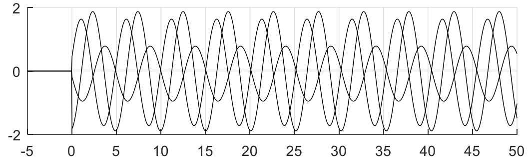
Stabiilisuudesta

- Liittyy tasapainopisteeseen (tpp) (x_0, u_0).
- Jos ollaan tpp:ssä, niin siellä pystytään riippumatta sen laadusta

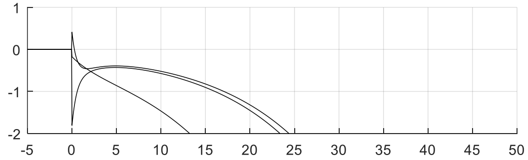
(I) Tpp asymptoottisesti stabiili



(II) Tpp stabiili



(III) Tpp epästabiili



- Lokaali I tai II – Stabiilisuuskäyttäytyminen I tai II vain, kun tila ”lähellä” tpp:tä
- Globaali I tai II – Stabiilisuuskäyttäytyminen I tai II riippumatta tilasta

Lineaarisen jatkuva-aikaisen systeemin stabiilisuudesta 1/2

- Tarkastellaan lineaarista dynaamista systeemiä $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, s.e., $\dim x = n$ ja lisäksi on annettu vakio-ohjaus u_0 ja alkutila $x(0)$
- Ratkaisu on muotoa

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} + k_1 \\
x_2(t) &= \beta_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \beta_n e^{\lambda_n t} + k_2 \\
&\vdots \\
x_n(t) &= \nu_1 e^{\lambda_1 t} + \nu_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + \nu_n e^{\lambda_n t} + k_n
\end{aligned}$$

jossa $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ovat systeemimatriisin A ominaisarvot eli $\det(\lambda I - A) = 0$

- $e^{\lambda t} = e^{\mathrm{Re}(\lambda) t}(\cos(\mathrm{Im}(\lambda)\, t) + i \sin(\mathrm{Im}(\lambda)\, t))$

Lineaarisen jatkuva-aikaisen systeemin stabiilisuudesta 2/2

- Systeemimatriisin A ominaisarvojen reaaliosat määräävät ratkaisun käyttäytymisen eli tasapainopisteen $(u_0, x_0 = -A^{-1}Bu_0)$ stabiilisuustyypin
  - Kaikki $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ => Asymptoottisesti stabiili
  - Yksikin $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$=> Epästabiili
  - Kaikki $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ ja vähintään yksi $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$
    - imaginaariakselilla olevat λ yksinkertaisia => Stabiili
    - im-akselilla useampikertanen λ => Epästabiili ($t\cos(\lambda t)$)
- Lineaarisessa tapauksessa kaikkien (ääretön kpletta) tasapainopisteiden stabiilisuustyyppi on sama
- Lineaariselle systeemille stabiilisuus on systeemin ominaisuus (globaali), joka ei riipu toiminta-alueesta tai ohjauksista
  - Epälineaarisessa tapauksessa tulee puhua tpp:n stabiilisuudesta/epästabillisuudesta/asymptoottisesta stabiilisuudesta

Lineaarisen jatkuva-aikaisen systeemin siirtofunktion stabiilisuus

- Laplace-muuntamalla lineaarinen tilayhtälömalli saadaan
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$
eli siirtofunktion navat yhtyvät A:n ominaisarvoihin
- Siirtofunktion $G(s)$ välittämä input-output -kuvaus on
  - Asymptoottisesti stabiili, jos nimittäjäpolynomin nollakohdat eli siirtofunktion navat ovat aidosti kompleksitason vasemmassa puoliskossa
  - Stabiili, jos 1) navat ovat kompleksitason vasemmassa puoliskossa ja 2) jotkin navoista on im-akselilla ja ne ovat yksinkertaisia
  - Epästabiili, jos yksikin napa on kompleksitason oikeassa puoliskossa
  - Epästabiili, jos im-akselilla on moninkertaisia napoja

Ohjattavuuden määritelmä

- Systeemin hallittavuuden karakterisointi

Systeemi **ohjattava**

$\Leftrightarrow$

On olemassa ohjaus, jolla systeemi saadaan mielivaltaisesta alkutilasta mihin tahansa tilaan äärellisessä ajassa

- Jos systeemi (open loop) on ohjattava, niin voidaan konstruoida takaisinkytketty tilasäädin, jonka avulla säädetyn systeemin (feedback) navat voidaan asetella mielivaltaisesti esim. s.e. systeemi on asymptoottisesti stabiili

Ohjattavuuden testaaminen

- Epälineaarisille systeemeille haasteellista (linearisointi!)
- Lineaariset systeemit: Aikainvariantti lineaarinen systeemi
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
on ohjattava, jos ja vain jos $n \times nm$-matriisin
$$Q_c = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B]$$
rangi on n ($n = \dim x$, $m = \dim u$)
- Rangi = lineaarisesti riippumattomien rivien/sarakkeiden lukumäärä
- Matriisi Q_c on ns. ohjattavuusmatriisi
- (Pätee myös diskreettiaikaisille systeemeille)

Ohjattavuuden tulkinta

- Tarkastellaan diskreettiaikaista systeemiä

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- Oletetaan, että alkutila x_0 annettu
- Tila ajanhetkellä n (n systeemin kertaluku) on

$$x(n) = A^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} Bu(k) = A^n x_0 + Q_c \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

- Jos ohjattavuusmatriisin rangi on n, niin jokainen $\mathbb{R}^n$:n vektori x voidaan esittää muodossa

$$x = A^n x_0 + Q_c \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

eli sopivalla ohjausten valinnalla systeemi saadaan alkutilastaan x_0 haluttuun tilaan $x(n)$

- Ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, jos ohjauksia on enemmän kuin yksi