Taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi

- Transientti- ja korrelaatioanalyysi tähtäävät impulssivasteen/askelvasteen mallintamiseen
  - Kuvaus aikatasossa
- Taajuus- Fourier- ja spektraalianalyysi tähtäävät systeemin taajuusominaisuuksien mallintamiseen:
  - Taajuusvaste
  - Kuvaus taajuustasossa
- Taajuusvaste = systeemin sisäänmenolle aiheuttama vahvistus ja vaihekulman muutos taajuuden funktiona:
  - Siirtofunktio $G(s)$ => $s=i\omega$ => taajuusvaste (taajuusfunktio) $G(i\omega)$
  - Siirtofunktio $G(z)$ => $z=e^{i\omega T}$ => taajuusvaste (taajuusfunktio) $G(e^{i\omega T})$
- Superpositioperiaate pätee edelleen:
  - Standardisyöte $A\sin\omega t$
  - Yhdistämiskeinona Fourier-sarja

Lineaarisen systeemin taajuusvaste

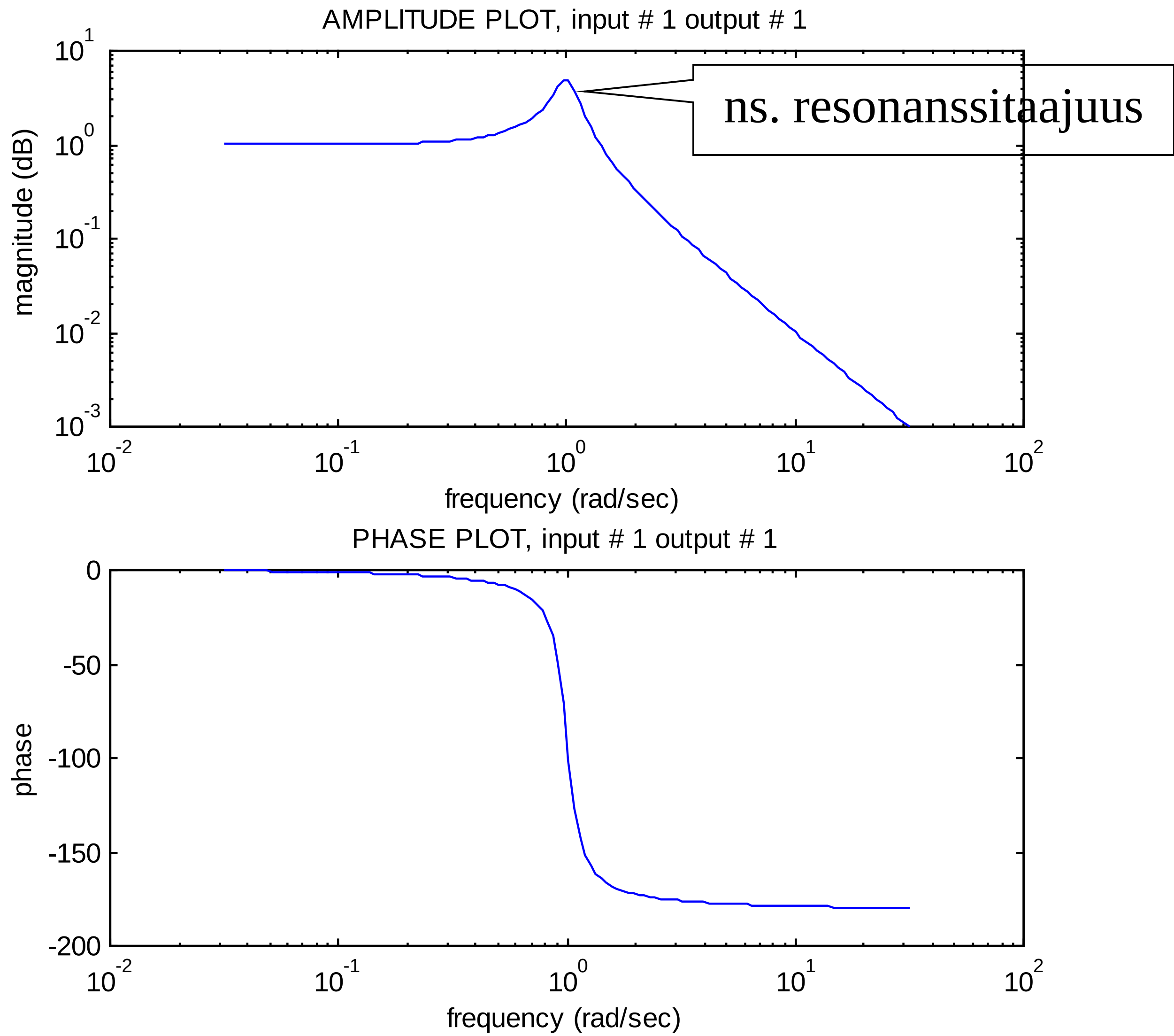
- Olkoon systeemin siirtofunktio $G(s)$, jonka navat vasemmassa puolitasossa, i.e., asymptoottisesti stabiili
- Valitaan sisäänmeno $u(t)=A\sin\omega t$; mitä tulee ulos?
- Voidaan osoittaa (ks. laskari #8 tehtävä #1 ja kotitehtävä #1), että kun alkutransientit ovat hävinneet, ulos tulee $B\sin(\omega t+\phi)$, jossa
  - $B=A|G(i\omega)|$
  - $\phi=\arg(G(i\omega))$
- **Taajuusanalyysi**: Mitataan B ja ϕ usealla eri ω => taajuusvaste

Boden diagrammi

- Vakiintunut tapa esittää taajuusvaste
- Piirretään amplitudisuhde $\log|G(i\omega)|$ (desibeleinä) ja vaihe-ero (asteina) $\arg(G(i\omega))$ (asteina) taajuuden (logaritminen asteikko) funktiona
- Vastaa näppärästi kysymykseen mitä tapahtuu mielenkiintoisilla taajuuksilla
- Approksimatiivinen piirto helppoa:
  - esim. sarjaankytkettyjen systeemien diagrammit voidaan laskea yhteen
  - $\log\ |G_1(i\omega)|\ |G_2(i\omega)| = \log\ |G_1(i\omega)| + \log\ |G_2(i\omega)|$
- Muita taajuusvasteen esitystapoja:
  - Nyquistin diagrammi
    - piirretään $G(i\omega)$ kompleksitasoon, kun $-\infty \leq \omega \leq \infty$
  - Nicholsin kartta
    - piirretään amplitudisuhde vaihe-eron funktiona

Esimerkki

- Toisen kertaluvun systeemin G(S) = 1/(s^2+0.2s+1) Boden diagrammi
- Vrt. laskari #8 tehtävä #4



•Matlab: `bodeplot`

Taajuusanalyysin etuja & haittoja

- Helppo käyttää, ei tarvita erityisiä laskentavirityksiä
- Ei vaadita muita oletuksia systeemistä kuin lineaarisuus
- Kiinnostavat taajuusalueet helppo tutkia tarkemmin
- Tuloksena taulukko tai mittauspisteiden kautta kulkeva interpolaatio:
  - Ei sovellu simulointiin sellaisenaan
  - Siirtofunktion estimointi taajuusvasteen avulla?
- Reaalimaailman systeemeillä ei usein voida kokeilla täysin vapaasti
- Vaatii pitkiä mittausaikoja
  - Alkutransientti
  - Useita mitattavia taajuuksia
  - Mikäli kiinnostavat taajuudet matalia

Fourier-analyysi

- Taajusvaste sisäänmenon ja ulostulon Fourier-muunnosten avulla
- Perusajatus: $Y(\omega)=G(i\omega)U(\omega)$ (Fourier-muunnos) $\Rightarrow G(i\omega)=Y(\omega)/U(\omega)$
- $y(t)$ ja $u(t)$ tunnetaan äärellisellä välillä $[0,S]$
- Muodostetaan Fourier-muunnoksista $Y(\omega)$ ja $U(\omega)$ arviot määritelmän perusteella:

$$Y_S(\omega)=\int_0^S y(t)e^{-i\omega t}dt, \quad U_S(\omega)=\int_0^S u(t)e^{-i\omega t}dt$$

$\Rightarrow$ Empiirinen siirtofunktioestimaatti (empirical transfer function estimate, ETFE):

- $\hat{G}(i\omega)=Y_S(\omega)/U_S(\omega)$

- perustuu vain mittauksiin ja lineaarisuusoletukseen

Fourier-analyysi käytännössä

- $u(t)=u_0\cos\omega_* t$ ja $S=k\pi/\omega_*$, $k=1,2,\ldots$ => $U_S(\omega_*)=u_0 S/2$, muuten $U_S(\omega)=0$
- Tällöin ETFE on $$\hat{G}_S(i\omega_*)=\frac{2}{u_0 S}\left(\int_0^S y(t)\cos(w_* t)dt-i\int_0^S y(t)\sin(w_* t)dt\right.$$
- Helppo laskea: korreloidaan y(t) sinin ja kosinin kanssa

- Käytännössä integraaleja approksimoidaan (diskreetti Fourier-muunnos): $$Y_S(\omega)=T\sum_{k=1}^{N} y(kT)e^{-i\omega kT},\quad U_S(\omega)=T\sum_{k=1}^{N} u(kT)e^{-i\omega kT}$$
  - T= näytteenottoväli ja S=NT
  - Jakso 2π => riittää laskea välille $0\leq\omega\leq 2\pi$, valitaan $\omega=r2\pi/N$, $r=0,\ldots,N-1$
- Nopea Fourier-muunnos (FFT, Fast Fourier Transform, Matlab *fft*)
  - Diskreetti Fourier-muuntaminen vaatii N^2 laskutoimitusta
  - FFR vaatii $N\log_2 N << N^2$ laskutoimitusta

ETFE:n tarkkuus

- ETFE:n ja todellisen taajuusvasteen ero riippuu
  - käytetystä ohjauksesta ja sen taajuussisällöstä
  - systeemin ominaisuuksista (impulssivaste)
  - signaali-kohinasuhteesta

$$|G(i\omega) - \hat{G}(i\omega)| \leq \frac{c}{|U(\omega)|} + \frac{|V(\omega)|}{|U(\omega)|}$$

- Jos u(t):ssä on sinikomponentti tietyllä taajuudella ja häiriössä ei, virhe ko. taajuudella pienenee S:n kasvaessa
- Muuten määräävä tekijä on signaali-kohinasuhde

Signaalien taajuussisältö - Spektri

- **Spektri (myös tehospektri, spektraalitieys):** merk. w(t):n spektriä $\Phi_w(\omega)$:llä, missä ω on (kulma)taajuus
  - ”yksikkönä” energia/taajuus
  - kertoo energian taajuusjakauman
- Kaksi määritelmää:
  1. Deterministisille signaaleille spektri määritellään signaalin Fourier-muunnoksen modulin neliönä
  2. Stationaarisille stokastisille prosesseille spektri määritellään kovarianssifunktion diskreettinä Fourier-muunnoksena

Signaalien taajuussisältöjen vertaaminen - Ristispektri

- **Ristispektri (ristitehotiheysspektri)** $\Phi_{yu}(\omega)$:
  - deterministisille signaaleille määritellään y:n Fourier-muunnoksen ja u:n Fourier-muunnoksen kompleksikonjugaatin tulona
  - stationaarisille stokastisille prosesseille se on vastaavasti ristikovarianssin diskreetti Fourier-muunnos
- Intuitiivinen tulkinta: tarkastellaan kahta signaalia y(t) ja u(t): jos u(t):ssä on taajuuskomponentti $\cos(\omega t)$, on y(t):ssä sama komponentti $|\Phi_{yu}(\omega)|$ kertaa suurempana ja vaiheeltaan $\arg \Phi_{yu}(\omega)$ jäljessä
- $\Phi_{yu}(\omega)=0 \Leftrightarrow$ signaalit korreloimattomia

Deterministisen jatkuva-aikaisen signaalin spektrit

- Signaali: $w(t), \; -\infty < t < \infty$
- Fourier-muunnos: $W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-i\omega t} dt$
- Spektri: $\Phi_w(\omega) = \left| W(\omega) \right|^2$
- Signaalit: $u(t)$ ja $y(t), \; -\infty < t < \infty$
- Ristispektri: $\Phi_{yu}(\omega) = Y(\omega)\overline{U(\omega)}$

Deterministisen diskreettiaikaisen signaalin spektrit

- Signaali: $w(kT),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
  - Näytteenottoväli T
- Fourier-muunnos: $W^{(T)}(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} w(kT) e^{-i\omega kT}$
- Spektri: $\Phi_w^{(T)}(\omega) = \left| W^{(T)}(\omega) \right|^2$
- Signaalit: $u(kT)$ ja $y(kT),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Ristispektri: $\Phi_{yu}(\omega) = Y^{(T)}(\omega)\overline{U^{(T)}(\omega)}$

Stokastisen diskreettiaikaisen signaalin spektrit

- Signaali: $w(kT),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ja $Ew(kT) = 0$
  - Näytteenottoväli T
- Kovarianssifunktio: $R_w(kT) = Ew(t + kT)w(t)$
- Spektri: $\Phi_w(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} R_w(kT) e^{-i\omega kT}$
- Signaalit: $u(kT)$ ja $y(kT),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Ristikovarianssifunktio: $R_{yu}(kT) = Ey(t + kT)u(t)$
- Ristispektri: $\Phi_{yu}(\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} R_{yu}(kT) e^{-i\omega kT}$

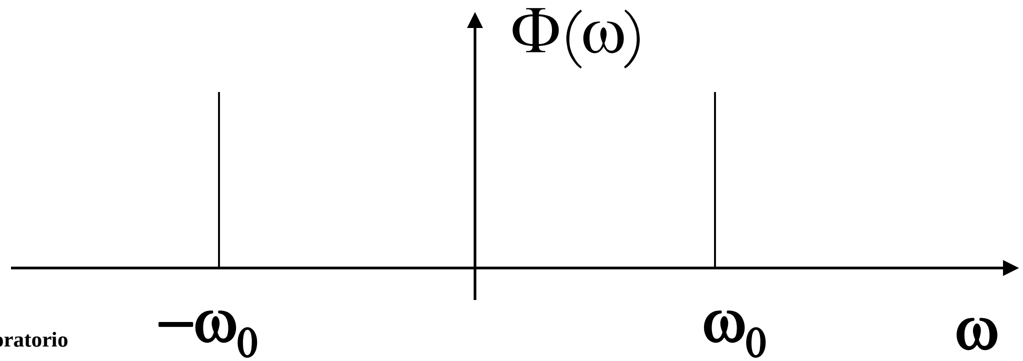
Esimerkki, deterministisen signaalin spektri

- $A\sin(\omega_0 t)$:n Fourier-muunnos on $i\pi A(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$

- Sen spektri on muunnoksen itseisarvon neliö:

$$\Phi(\omega)= \pi^2 A^2(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0))$$

- Energia on täysin taajuuksilla ω ja -ω ja spektri näyttää tältä:



Esimerkki, stokastisen signaalin spektri

- Valkoisen kohinan e(t) spektri
- $Ee(t)=0$ ja e(t):n kovarianssifunktio on $R_e(kT)=Ee(t+kT)e(t)=\lambda^2$, kun $k=0$ ja 0 muulloin
  - λ^2 on kohinan varianssi $Ee(t)^2$
- Ol. $T=1$ ja lyödään tämä spektrin kaavaan => $\Phi_e(\omega)= \lambda^2$
  - valkoinen kohina sisältää siis kaikkia taajuuksia yhtä paljon

Spektraalianalyysin tausta: Jatkuva-aikaisen lineaarinen järjestelmän vaikutus spektriin

- Systeemi $y(t)=G(p)u(t)+v(t)$ (I), $u(t)$ ja $v(t)$ riippumattomia
- Fourier-muunnetaan (I) puolittain: $Y(\omega)=G(i\omega)U(\omega)+V(\omega)$ (II)
- (II) puolittain |.|^2 ja muistetaan spektrin ja ristispektrin määritelmät =>

$$\Phi_y(\omega)=|G(i\omega)|^2\Phi_u(\omega)+\Phi_v(\omega)$$

- Kerrotaan (II) puolittain conj($U(\omega)$):llä ja muistetaan spektrin ja ristispektrin määritelmät =>

$$\Phi_{yu}(\omega)=G(i\omega)\Phi_u(\omega)$$

Spektraalianalyysi

- Taajuusvaste sisäänmenon ja ulostulon spektrien avulla
- Systeemille y(t)=G(p)u(t)+v(t) pätee
  - $\Phi_{yu}(\omega)=G(i\omega)\Phi_u(\omega)$ (1)
  - $\Phi_y(\omega)=|G(i\omega)|^2\Phi_u(\omega)+\Phi_v(\omega)$ (2)
- (1):stä saadaan

$$\hat{G}_N(i\omega)=\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)/\hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

- (2):sta voidaan estimoida häiriön v(t) spektri

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega)=\hat{\Phi}_y^N(\omega)-|\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)|^2/\hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

- Yllä on käytetty sopivia spektrin estimaatteja N:n mittauksen pohjalta
- Spektreille tarvitaan estimaatit!

Spektrin estimointi

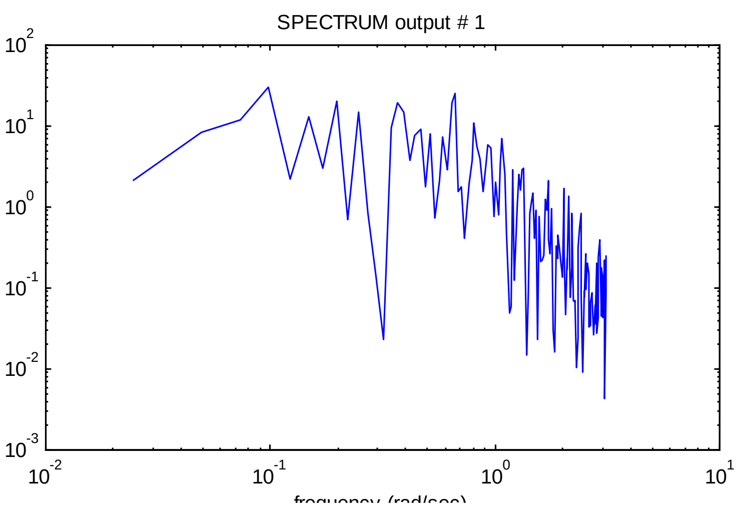
- Signaalin u(t) spektri $\Phi_u(\omega)$:
  - u(t):n Fourier-muunnoksen itseisarvon neliö (deterministinen signaali)
- Ol. että u(t):tä on havaittu T:n välein
  - Datasta saadaan vain näytteistetyn signaalin spektri
  - Jos T pieni verrattuna u(t):n taajuussisältöön, ero on pieni
  - Oletetaan seuraavassa että **T=1**
- Suoraan määritelmästä saadaan **periodogrammi**:

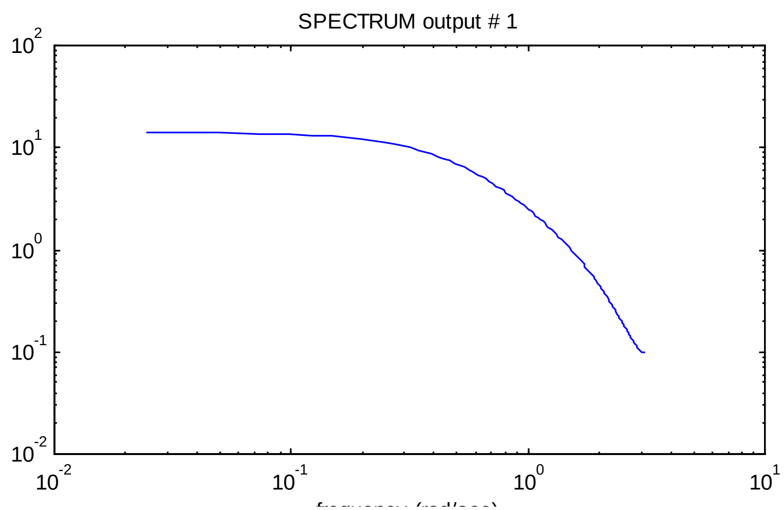
$$\hat{\hat{\Phi}}_N(\omega) = \frac{1}{N} |U_N(\omega)|^2, \quad U_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N} u(k) e^{-i\omega k}$$

- Huom.! Näytteenottoväli T => näytteenotto(kulma)taajuus 2π/T => Nyquist-taajuus π/T => periodogrammi toimii, kun -π/T≤ω≤π/T

Esimerkki

- ARMA-prosessin y(t)=0.6*y(t-1)+0.5e(t-1)+e(t) realisaation periodogrammi (N=10000) ja todellinen spektri





Periodogrammin ominaisuuksia

- Tyypillisiä ominaisuuksia:
  - Periodogrammi on hyvin epätasainen
  - Puhtaat sinikomponentit näkyvät piikkeinä
- Antaa kohtuullisen kuvan signaalin taajuussisällöstä
- Periodogrammi on satunnaismuuttuja, kun u(t) stokastinen prosessi:
  - Odotusarvo yhtyy todellisen spektrin odotusarvoon (A)
  - Varianssi EI lähesty nollaa N:n kasvaessa (B) => epätasaisuus!
  - eri taajuuksien estimaatit eivät korreloi (C)
- Taajuusresoluutio: mitkä taajuudet eroavat toisistaan?
  - Periodogrammin resoluutio on $2\pi/N$

$$\text{(A)}\ \mathbf{E}\left\{\hat{\hat{\Phi}}(\omega)\right\} = \Phi_u(\omega) + R^{(1)}$$

$$\text{(B)}\ \mathbf{Var}\left\{\hat{\hat{\Phi}}(\omega) - \Phi_u(\omega)\right\} = \Phi_u^2(\omega) + R^{(2)}$$

$$\text{(C)}\ \mathbf{Cov}\left\{\hat{\hat{\Phi}}(\omega_1) - \Phi_u(\omega_1), \hat{\hat{\Phi}}(\omega_2) - \Phi_u(\omega_2)\right\} = R^{(3)} \qquad |\omega_1 - \omega_2| \geq \frac{2\pi}{N}$$

where $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ and $R^{(3)}$ go to zero as N goes to infinity.

Keinoja pienentää varianssia

- Periodogrammin varianssi usein turhan suuri
- Spektriestimaatin toivottu ominaisuus sileys
  - trade-off: tasoittaminen huonontaa taajuusresoluutiota

1. Usean riippumattoman estimaatin keskiarvottaminen (Welchin menetelmä)
2. Keskiarvotetaan läheisten lähitaajuuksien kanssa => ikkunointi (Blackman-Tukeyn menetelmä)

1. Tasoittaminen keskiarvottamalla

- Jaetaan signaali R:ään (mahdollisesti osin päällekkäiseen) segmenttiin
- Periodogrammi kullekin segmentille
  - sopivin valinnoin tehokas laskenta FFT:llä
- Spektriestimaatti saadaan näiden periodogrammien keskiarvona
- Jos ei päällekkäisyyttä, niin
  - spektriestimaatin varianssi pienenee R:ään verrannollisesti
  - taajuusresoluutio huononee R:ään verrannollisesti
- Vastaavasti ristispektrin estimointi

2. Tasoittaminen ikkunoimalla

- Muodostetaan estimaatti taajuudella ω laskemalla painotettu keskiarvo periodogrammista:

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\omega - \xi)\hat{\hat{\Phi}}_N(\xi)d\xi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\omega)d\omega = 1$$

- $W_\gamma(\omega)$ on painofunktio (ikkunafunktio):
  - Parametri γ kuvaa ikkunan leveyttä
  - leveä ikkuna => tasainen spektri vs. kapea ikkuna => hyvä taajuusresoluutio

Implementointi aikatasossa

- Taajuustasossa implementointi tehotonta
- Em. integraali aikatasossa ilmaistuna on (Appendix 8.8):

$$\hat{\Phi}_N(\omega) = \sum_{k=-\gamma}^{\gamma} w_\gamma(k)\hat{R}_u^N(k)e^{-i\omega k}; w_\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi)e^{i\xi k}d\xi$$

- R^N$_u$(k) on u:n autokovarianssin estimaatti viiveellä k
- Aikaikkuna $w_\gamma(k)$ oletettu nollaksi kun |k|>γ
- Paljon käytetty on Hamming-ikkuna:

$$w_\gamma(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\pi k}{\gamma}\right)\right), & \text{kun } |k| < \gamma \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

γ kasvaa => tasoitetun periodogrammin

taajuusresoluutio pienenee (hyvä asia) $\approx \dfrac{\pi}{\sqrt{2}\gamma}$

varianssi kasvaa (ei niin hyvä asia) $\approx \sqrt{2}\dfrac{\gamma}{N}\Phi_u^2(\omega)$

Blackman-Tukey -spektriestimaatti

1. Valitse aikaikkuna $w_\gamma(k)$ (Hamming ok)
2. Valitse ikkunanleveysparametri γ (tämä jää analyytikon vastuulle, muuten voi pitää silmät kiinni)
3. Laske u:n autokovarianssin (symmetrinen) estimaatit 0:sta γ:aan
4. Laske $\hat{\Phi}_N(\omega)$ edellä kuvatun mukaisesti

- Huom. 1) edellä oletettu että T=1. Jos näin ei ole, on spektriestimaatti skaalattava:

$$\hat{\Phi}_N^0(\xi) = T\hat{\Phi}_N(\xi T), -\pi / T \le \xi \le \pi / T$$

- Huom. 2) Myös ristispektri voidaan estimoida samaan tapaan korvaamalla autokovarianssi ristikovarianssilla

Taajuusvasteen estimointi (Spectral Analysis, SPA)

1. Kerää data y(k), u(k), k=1,...,N; keskiarvota
2. Muodosta spektriestimaatit
   - joko tasoittaminen keskiarvottamalla
   - tai tasoittaminen ikkunoimalla
3. Laske systeemin taajuusvaste kaavasta

$$\hat{G}_N(i\omega) = \hat{\Phi}_{yu}^N(\omega) / \hat{\Phi}_u^N(\omega)$$

Yhteenveto spektraalianalyysistä

- Yleispätevä menetelmä
  - vaatii ainoastaan lineaarisuusoletuksen
  - ei vaadi erityisiä herätteitä
- Sopivalla γ:n valinnalla saadaan hyvä kuva systeemin taajuusominaisuuksista
- Tulos ei kelpaa suoraan simulointiin
  - siirtofunktion estimointi/päättely estimoidun taajuusvasteen avulla
- Spektraalianalyysi ei toimi takaisinkytketyissä systeemeissä
  - u ja v korreloituneita, perusyhtälöt (1) ja (2) dialla #17 eivät päde

Yhteenveto - epäparametriset identifiointimenetelmät

- Käsitelty
  - Transientti- ja korrelaatioanalyysi => impulssi- ja askelvaste
  - Taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => taajuusvaste
- Tulokset kvalitatiivisluontoisia
  - Yleiskuva systeemistä
  - Eivät sovellu suoraan simulointiin
  - Ohjaavat jatkotutkimuksia ja koesuunnittelua:
    esim. kiinnostavat taajuudet