# Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- Koesuunnittelu, identifiointikoe
- Mittaustulosten / datan esikäsittely
- Ei-parametriset menetelmät
  - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta
- Parametrien estimointi
- Mallirakenteiden vertaaminen
- Mallin arviointi & validointi

# Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- **Koesuunnittelu, identifiointikoe**
- Mittaustulosten / datan esikäsittely
- Ei-parametriset menetelmät
  - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta
- Parametrien estimointi
- Mallirakenteiden vertaaminen
- Mallin arviointi & validointi

# Identifiointikokeen suunnittelu

- Hyvä koe tuottaa paljon informaatiota systeemistä
- Suunnitteluongelmia
  - mitä signaaleja mitataan?
  - sopiva näytteenottoväli
  - sisäänmenon / herätteen valinta

# Perusajatuksia

- Millä tahansa menetelmällä tuotettu parametriestimaatti kuvaa systeemiä parhaalla mahdollisella tavalla *identifiointikokeen olosuhteissa*
- Malli antaa systeemin hyvän kuvauksen jos
  1. Mallin parametrisointi sallii sen ja malli on rakenteellisesti identifioituva
  2. Identifiointikoe on onnistunut
- Parametriestimaatin kovarianssi riippuu käänteisesti ennusteen gradientista => pieni kovarianssi, jos ennuste on herkkä parametrille
  - Valitse y s.e. y^ on mahdollisimman herkkä θ:n suhteen

# Näytteenottovälin valinta

- Korkea näytteenottotaajuus vs. systeemin dynamiikka

  => liian paljon dataa
- Matala näytteenottotaajuus vs. systeemin dynamiikka
  => liian vähän dataa
- Parempi liikaa kuin liian vähän dataa
  - Onko käytännössä mahdollista?
- Peukalosääntöjä
  - Sopiva näytteenottotaajuus on noin 10 X kiinnostava taajuuskaista
  - Askelvaste => 5-8 näytettä nousuaikana
- Aluksi liikaa dataa => voidaan uudelleennäytteistää

# Sisäänmenon valinta 1/2

- Sisäänmeno u(t) herättää systeemin
- Esim. u(t)=Asinωt antaa tietoa (vahvistus & vaihekulma) vain yhdestä taajuudesta => harvoin riittävä
- u(t):n oltava siis <u>taajuussisällöltään rikas</u>
- Hyvä signaali on esim. satunnaisesti 2 arvon välillä vaihteleva signaali (ks. laskari #10, tehtävä #3)
  - taajuuspainotus voidaan valita säätämällä vaihtotodennäköisyyttä

# Sisäänmenon valinta 2/2

- Taajuussisällön ohjenuorana taajuustulos (diasetti #9, dia #15)
  - Pääosa signaalin energiasta niillä taajuuksilla, joilla mallille halutaan hyvä suorituskyky
- Sisäänmenon energiasisältö oltava mallintamisen kannalta tärkeillä taajuuksilla, esim. Boden diagrammin taitekohdat
- Ajatus aikatasossa: u:n sisällettävä niin nopeita vaihteluja, että systeemin lyhimmät mielenkiintoiset aikavakiot heräävät
- Vaihtoehto satunnaiselle signaalille PRBS (PseudoRandom Binary Sequence (ks. laskari #10, tehtävä #3)
  - Deterministinen signaali pitkällä periodilla

# Signaalin jatkuvasti herättävyys – määritelmiä taajuustasossa

Määritelmä:

Signaali u(t) (spektri $\Phi_u(\omega)$) on **jatkuvasti herättävä (persistently exciting, p.e.) astetta / kertalukua n**

$$\Leftrightarrow$$

$\Phi_u(\omega) > 0$ ainakin n:ssä pisteessä välillä $(-\pi,\pi)$ (ol. T=1)

- Määritelmä: u(t) on **jatkuvasti herättävä**, jos $\Phi_u(\omega) > 0$ melkein kaikkialla välillä $(-\pi,\pi)$

  $\Rightarrow$ äärelliset lineaariset suotimet eivät vaikuta jatkuvasti herättävyyteen

# Määritelmä aikatasossa

- u(t) p.e. astetta n ⇔ autokovarianssimatriisi (vtr. Wiener-Hopfin yhtälö)

$$\overline{R}_n = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \cdots & R_u(n-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & \cdots & R_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(n-1) & R_u(n-2) & \cdots & R_u(0) \end{bmatrix}$$

  on ei-singulaarinen
- Yksikköimpulssi: p.e. astetta 0
- Yksikköaskel : p.e. astetta 1
- Siniaalto: voidaan osoittaa, että $A\sin\omega_0 t$:n spektri on $A^2/4[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$ => p.e. astetta 2
- Valkoinen kohina: $R_n=\lambda I_{n-1}$ => p.e. (seuraus: kaikki ARMA-prosessien ulostulot p.e.
- PRBS: p.e. astetta M, M = jakson pituus

# Käytännöllinen tulos

Olkoon **kohinaisen** systeemin siirtofunktio $G(q,\theta)$ muotoa $B(q,\theta)/F(q,\theta)$ ja olkoot polynomien asteluvut $n_b$ ja $n_f$.

=>

Polynomien kertoimet voidaan estimoida sisäänmenolla $u(t)$, joka on jatkuvasti herättävä vähintään astetta $n_b + n_f$

Peukalosääntö:

Kertalukua n olevan systeemin parametrien identifiointiin tarvitaan signaali joka on p.e. vähintään astetta 2n

# Suljetun silmukan systeemien identifiointi

- Käytännössä toimivien prosessien säätöä ei voida identifioinnin ajaksi keskeyttää
- Sisäänmeno määräytyy ainakin osin ulostulosta
  - Köyhdyttää sisäänmenoa => hankaluuksia
- Vähennä säätöä jos mahdollista
- Korrelaatio- ja spektraalianalyysi ei toimi takaisinkytketyssä järjestelmässä
- Parametriset ennustevirhemenetelmät parempia, kun…
  - Referenssisignaali sisäänmenoksi

# Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- Koesuunnittelu, identifiointikoe
- **Mittaustulosten / datan esikäsittely**
- Ei-parametriset menetelmät
  - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta
- Parametrien estimointi
- Mallirakenteiden vertaaminen
- Mallin arviointi & validointi

# Mittaustulosten / datan esikäsittely

- Koe suoritettu, data kerätty

  => datan esikäsittely ennen identifiointia
- Piirrä kuva
  - trendit
  - outlierit
- Keskiarvota / poista trendi tarvittaessa
- Korkeataajuisten häiriöiden suodattaminen (laskostuminen)
- Poista outlierit
  - Neliöllinen hyvyyskriteeri painottaa outliereita
- Edustavan datasetin valinta - jako estimointi- ja validointidataan

# Esisuodatus

- Parametriestimointi voidaan tulkita taajuusvasteen sovittamiseksi erään taajuusnormin (diasetti #9, dia #15) mielessä
- Esisuodatetaan u(t) ja y(t) L(q):lla => taajuusnormiin tulee komponentti $|L(e^{i\omega})|^2$ mukaan
  - valitaan L(.) kaistapäästösuodattimeksi => voidaan jälkikäteen valita sovituksessa painotettavat taajuudet!
  - Ks. laskari #10, tehtävä #4

# Identifiointiprosessi kokonaisuutena

Alustavia kokeita

- Koesuunnittelu, identifiointikoe
- Mittaustulosten / datan esikäsittely
- Ei-parametriset menetelmät:
  - transientti-, korrelaatio-, taajuus-, Fourier- ja spektraalianalyysi => askel-, impulssi- ja taajuusvaste; ajatuksia esim. kertaluvuista
- **Mallirakenteen (rakenneparametrit) valinta**
- Parametrien estimointi
- **Mallirakenteiden vertaaminen**
- Mallin arviointi & validointi

# Mallirakenteen valinta

- Rakenteellinen – black box?
  - Rakenteellinen vaikea tuottaa, mutta usein vähemmän estimoitavaa => ”tarkempia” tuloksia
- Black-box: mallirakenne & kertaluvut?
  - Estimointimenetelmä (ARX –PNS, muut vaativat iteratiivisia)
  - Kertaluvut?
    - ARMA-, ARIMA-mallit oma tarinansa
  - Niukkuusperiaate (parsimony principle): valitse kahdesta tasaväkisestä mallista se, jossa on vähemmän parametreja
    - Miksi? Voidaan osoittaa, että ylimääräiset parametrit lisäävät ennustevirheen varianssia
- Käyttötarkoitus; mallinnusosaaminen; algoritminen kompleksisuus;...

# Mallirakenteiden vertaaminen

- Helppoa – verrataan jäännösneliösummia
- Vai hetkinen... kun lisään tarpeeksi monta parametria, siitä tulee nolla
  - Tietyn rajan jälkeen malli alkaa sovittautua datan kohinaan
- Kupletin juoni ei olekaan estimointidataan sovittaminen vaan ilmiön kuvaaminen
- Ristiinvalidointi
  - Mallin suorituskyvyn (esim. ennustuskyvyn) arviointi riippumattomalla datalla
- Kvantitatiivinen analyysi (vrt. lineaariset regressiomallit):
  - Pieneneekö jäännösneliösumma tilastollisesti merkitsevästi, kun malliin lisätään parametri?
  - Informaatiokriteerit: sakotetaan parametrien lisäämisestä

# $\chi^2$-testi

- Olkoot $M_1$ ja $M_2$ kaksi hierarkkista mallirakennetta (ts. $M_1$ saadaan $M_2$:sta poistamalla parametri/parametreja)
- Ol. että kumpikin mallirakenne kuvaa systeemin niin, että ennustevirheet ovat valkoista kohinaa
- Tällöin testisuure $\chi = N(V_N^1 - V_N^2)/V_N^2$ on asymptoottisesti $\chi^2$- jakautunut vapausasteella $p_2$-$p_1$
  - $p_i$= parametrien lkm mallissa i
  - $V_N^i$ jäännösneliösumman arvo mallilla i
  - N havaintojen lukumäärä
- Idea: poikkeaako testisuure nollasta tilastollisesti merkitsevästi kun siirrytään mallista 1 malliin 2?

# Informaatiokriteerit

- Jäännösneliösumma vs. parametrien lukumäärä d
- Tyypillinen funktionaalinen muoto: $W_N = \beta(d,N)V_N$
  - $V_N$ = parametreistä (d kpl) riippuva ennustevirheiden neliösumma
  - $\beta$ kasvaa kun d kasvaa (ja vähenee kun N kasvaa)
- Valitaan malli, jolle $W_N$ on pienin

# Informaatiokriteereitä

- Akaiken informaatiokriteeri

  $AIC=(1+2d/N)V_N$

  – Kullback-Leibler –etäisyysellä (informaatioetäisyys) voidaan mitata kahden tn-jakauman etäisyyttä
  – AIC:n minimoiva malli minimoi mallin ja systeemin informaatioetäisyyden

- Final Prediction Error

  $FPE=(1+d/N)/(1-d/N)V_N/N$

  – Keskimääräinen estimaatti ennustevirheen varianssille, kun estimaatti lasketaan muulla kuin mallin identifiointiin käytetyllä datalla

- Rissasen minimipituuskriteeri

  $MDL=(1+2d\ \log N/N)V_N$

  – Kuvaa tilaa, joka tarvitaan mallin sisältämän informaation (mallin parametrit + ennustevirheet) tallentamiseksi pienimpään mahdolliseen tilaan

# Hankel-matriisin testaus 1/2

- N:nnen kertaluvun järjestelmän impulssivaste h(t) riippuu lineaarisesti n:stä edellisestä arvosta h(t-1),...,h(t-n)
- Esim. $y(t)=-a_1y(t-1)-a_2y(t-2)+b_1u(t-1)+b_2u(t-2)$
- u(0)=1,u(i)=0 kaikilla i >0; y(0)=y(-1)=y(-2)=0

$\Rightarrow$ Vaste h(1)=b1; $h(2)=-a_1h(1)+b2$; $h(3)=-a_1h(2)-a_2h(1)$;...;$h(t)=-a_1h(t-1)-a_2h(t-2)$ kaikilla t>2

---

Määritellään Hankel-matriisi:

$$H(l,k)=\begin{bmatrix} h(k) & h(k+1) & \dots & h(k+l-1) \\ h(k+1) & h(k+2) & \dots & h(k+l-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(k+l-1) & h(k+l-2) & \dots & h(k+2l-2) \end{bmatrix}$$

# Hankel-matriisin testaus 2/2

- Järjestelmän kertaluku n => H(l,k):n rangi = n kaikilla $l \geq n$
- Testaus: det (H(l,k))=0 kun l>n
- Kohinaa => testataan perättäisten determinanttien suhteita: $D_l = |\det(H(l,k))| / |\det(H,l+1,k))|$
- Determinantit voidaan keskiarvottaa yli k:n
- l=n maksimoi $D_l$:n
- Käytännössä:

  Korrelaatioanalyysi => Impulssivaste

  => Hankel-matriisi => $D_l$ => n

# Tulomomenttimatriisin testaus

- Olkoot järjestelmän kertaluku n ja u pe vähintään n+1
- Määr. U(l):

$$U(l) = \begin{bmatrix} y(l) & \dots & y(1) & | & u(l) & \dots & u(1) \\ y(l+1) & \dots & y(2) & | & u(l+1) & \dots & u(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(N) & \dots & y(N-l+1) & | & u(N) & \dots & u(N-l+1) \end{bmatrix}$$

- Hae suurin l = l* jolla U(l) vielä täyttä (rivi)rangia => n=l*
  - Käytännössä hae suurin l=l* jolla $U(l)^T U(l)/N$ (tulomomenttimatriisi) täyttä rangia => n=l*
- Käytännössä:
  - 1) Tee koe sopivalla herätteellä
  - 2) Etsi l* eli n