Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systeemien identifiointi

6. harjoituksen ratkaisut

1. Laplace-tasossa saadaan annetulle venttiilille

$$W(s) - W_0(s) = G_v(s)U(s) + V(s),$$

missä $V(s)$ on venttiilin paine-ero, $W(s)$ virtaus ja $W_0(s)$ virtaus tasapainotilassa. Olkoon $y(t) = h(t) - h_0$ pinnankorkeuden $h(t)$ poikkeama halutusta referenssikorkeudesta h_0, jolloin pinnankorkeudelle pätee

$$Y(s) = G(s)(W(s) - W_0(s)).$$

Tarkastellaan nyt tilannetta $v(t) = 0$, kun $t < 3$ ja $v(t) = -1$, kun $t > 3$.

a) Käytä Simulink-mallia las06t1a.slx. Eli tässä asetetaan $u(t) = 0$. Havaitaan, että häiriö aiheuttaa systeemin tilaan pysyvän poikkeaman.

b) Nyt asetetaan P-säädin, jolloin $u(t) = -K_P y(t)$. Käytetään mallia las06t1b.slx, jolloin nähdään, että kasvattamalla vahvistusta K_P saadaan nopeampia säätimiä, mutta edelleen jää pysyvä poikkeama halutusta tasapainoarvosta.

c) Lisäämällä säätöön I-osa saadaan pysyvä poikkeama eliminoitua. Nyt siis

$$u(t) = -K_P y(t) - K_I \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau.$$

Kokeilemalla löydetään, että esimerkiksi $K_P = 2$ ja $K_I = 1$ saadaan stabiili säätö. $K_I = 7$ tuottaa jo epästabiilin ratkaisun.

d) Säädön stabiilisuutta voidaan parantaa lisäämällä vielä D-osa, jolloin

$$u(t) = -K_P y(t) - K_I \int_{t_0}^{t} y(\tau) d\tau - K_D \frac{dy(t)}{dt}.$$

D-osalla saadaan parannettua säädön stabiilisuutta.

Käytännössä ongelma on se, että D-osa derivoi signaalia y, mikä vahvistaa kohinaa. Siten kohinaiselle datalle D-osa voi aheuttaa ongelmia käytännössä.

e) Simulink malli las06t1e.slx sisältää nyt diskreettiaikaisen PID-säätimen. Kiinnitetään $K_P = K_I = K_D = 0.1$. Huomataan, että näytteenottovälin kasvattaminen hidastaa säätöä ja tekee siitä epästabiilimman.

f) Nyt siis $u(t) = \sin(\omega t)$ ja tarkastellaan diskreettiä PID-säädintä. Pidetään samat säätimen parametriarvot kuin edellisessäkin kohdassa ja valitaan näytteenottoväliksi 1s. Kun valitaan esimerkiksi ω sopivasti huomataan, että säädin toimii huonosti, eikä se havaitse näin suuritaajuista häiriövärähtelyä, vrt. Nyquist taajuus.

Pienitaajuisilla värähtelyillä säädin toimii huomattavasti paremmin.

2.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Käytettäessä PID-säädintä saadaan Laplace-tasossa ohjaukselle

$$U(s) = -\left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)(Y(s) - R(s))$$

a) Valitaan siis $K_D = K_I = 0$. Esitetään systeemi ensin suljetun silmukan muodossa, eli upotetaan säädin systeemin siirtofunktioon, jolloin

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)K_P(R(s) - Y(s)),$$

missä $R(s)$ on referenssisignaali, jota $Y(s)$:n halutaan seuraavan mahdollisimman tarkasti. Näin saadaan

$$Y(s) = \frac{K_P G(s)}{1 + K_P G(s)} R(s),$$

eli suljetun systeemin siirtofunktio on

$$G_c(s) = \frac{K_P}{\frac{1}{G(s)} + K_P} = \frac{K_P}{s(s+1)(s+2) + K_P}.$$

Siten systeemin juuret (siirtofunktion jakajan nollakohdat) saadaan karakteristisesta yhtälöstä

$$s(s+1)(s+2) + K_P = 0,$$

jonka juuret piirtävät juuriuran kun K_P:ta muutetaan. Ura voidaan piirtää Matlabissa suoraan funktiolla rlocus (katso tiedostosta las06t2.m). Juuriurasta havaitaan, että juuret voivat mennä oikeaan puolitasoon, jolloin systeemi on epästabiili.

Ratkaistaan K_P:n arvo, jolla systeemi menee epästabiiliksi. Lasketaan siis millä K_P:n arvolla juuriura leikkaa imaginaariakselin, eli asetetaan karakteristisessa yhtälössä $s = i\omega$

$$\begin{aligned}
&i\omega(i\omega+1)(i\omega+2) + K_P = 0 \\
\Rightarrow &(i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + 2(i\omega) + K_P = 0 \\
\Rightarrow &(KP - 3\omega^2) + (2\omega - \omega^3)i = 0,
\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}
\omega(2-\omega^2) = 0 &\Rightarrow \omega = 0 \text{ tai } \omega^2 = 2 \\
K_P = 3\omega^2 &\Rightarrow K_P = 0 \text{ tai } K_P = 6.
\end{aligned}$$

Nyt havaitaan pienellä päättelyllä ja tarkastelemalla juuriuraa, että stabiili ratkaisu saadaan, kun $K_P \leq 6$.

b) Asetetaan nyt $K_P = 6$ ja lisätään säätimeen D-osa, jolloin

$$Y(s) = G(s)(K_P + K_D s)(R(s) - Y(s)),$$

josta

$$Y(s) = \frac{G(s)(K_P + K_D s)}{1 + (K_P + K_D s)G(s)} = \frac{K_P + K_D s}{s(s+1)(s+2) + K_P + K_D s},$$

eli karakteristinen yhtälö on

$$s(s+1)(s+2) + K_P + K_D s = 0, \text{ missä } K_P = 6.$$

Piirtämällä juuriura nähdään, että juuret pysyvät vasemmassa puolitasossa, eli D-osa stabiloi systeemiä. Huomaa kuitenkin 1. tehtävässä huomautettu käytännön aspekti - derivointi vahvistaa kohinaa.

3. a) Määritetään ensin suljetun silmukan systeemi kuvaamaan tilatakaisinkytkentää.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = (A - BK)x(k),$$

josta z-muuntamalla saadaan

$$zX(z) = (A - BK)X(z),$$

eli

$$(zI - A + BK)X(z) = 0,$$

ja systeemin karakteristinen yhtälö on siis

$$\det(zI - A + BK) = 0.$$

Auki kirjoittamalla tulee

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right) \\ = \det\begin{bmatrix} z+1+k_1 & 2+k_2 \\ -1 & z \end{bmatrix} \\ = z^2 + (1+k_1)z + 2 + k_2.\end{aligned}$$

Nyt halutaan, että karakteristsella yhtälöllä on kaksoisjuuri $z = 0.5$, eli, että karakteristinen yhtälö on

$$(z - 0.5)^2 = z^2 - z + 0.25 = 0,$$

josta nähdään, että

$$\begin{aligned} 1 + k_1 &= -1 \\ 2 + k_2 &= 0.25, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} k_1 &= -2 \\ k_2 &= -1.75. \end{aligned}$$

b) Nyt on siis tarkasteltavana jatkuva-aikainen systeemi. Edellä diskreetissä tapauksessa z-muunnettiin, niin nyt jatkuvassa maailmassa Laplace-muunnetaan suljetun silmukan tilayhtälö

$$\dot{x} = (A - BK)x,$$

jolloin saadaan

$$sX(s) = (A - BK)X(s),$$

ja

$$(sI - A + BK)X(s) = 0,$$

josta karakteriseksi yhtälöksi tulee

$$\det(sI - A + BK) = 0,$$

ja auki kirjoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -20.6 + k_1 & s + k_2 \end{bmatrix} \\
&= s^2 + k_2 s - 20.6 + k_1 = 0.
\end{aligned}$$

Haluttu karakteristinen yhtälö on nyt

$$(s + 1.8 - 2.4i)(s + 1.8 + 2.4i) = s^2 + 3.6s + 9.$$

Nyt saadaan

$$k_1 = 29.6 \text{ ja } k_2 = 3.6.$$

Voit kokeilla tiedostoilla las06t3a.m ja las06t3b.m napojen sijainnin vaikutusta suljetun silmukan vasteeseen askelmaisella ohjauksella.

4. a) Systeemi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned}
\ddot{h} &= g - \frac{Ki^2}{hM} \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{Ri}{L} + \frac{u}{L}
\end{aligned}$$

Ratkaistaan h_0:aa vastaavat tasapainoarvot i_0 ja u_0 yhtälöistä

$$\begin{aligned}
Mg - \frac{Ki_0^2}{h_0} &= 0 \\
u_0 &= Ri_0,
\end{aligned}$$

joista saadaan

$$i_0 = \sqrt{\frac{Mgh_0}{K}} \text{ ja } u_0 = R\sqrt{\frac{Mgh_0}{K}}.$$

Sitten voidaankin linearisoida. Merkitään tiloja

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta \dot{h} \\ \Delta i \end{bmatrix}.$$

Derivoimalla saadaan linearisoiduksi systeemiksi

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u,$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{Ki_0^2}{h_0^2 M} & 0 & -2\frac{Ki_0}{h_0 M} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 981 & 0 & -8.86 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix},$$

ja

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Havaitaan korkeutta x_1, jolloin

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u,$$

missä $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $D = 0$.

b) Ohjaus $\Delta u = 0$, jolloin

$$sX(s) = AX(s),$$

ja

$$(sI - A)X(s) = 0,$$

jolloin systeemin karakteristinen yhtälö on

$$\det(sI - A) = 0,$$

eli kyse on totutusti matriisin A ominaisarvojen laskemisesta. Ne voidaan laskea numeerisesti vaikkapa Matlabin eig-funktiolla, joka antaa ominaisarvoiksi

$$\begin{bmatrix} 31.32 & -31.32 & -100 \end{bmatrix},$$

joista yksi on oikeassa puolitasossa, jolloin systeemi on epästabiili.

c) Tarkistetaan saavutettavuus ja tarkkailtavuus. Nyt

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -886 \\ 0 & -886 & 88689 \\ 100 & -1000 & 1000000 \end{bmatrix},$$

jonka rangi on selvästi $n = 3$. Tarkkailtavuusmatriisiksi saadaan

$$Q_o = \begin{bmatrix} C^* & A^*C^* & A^{2^*}C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 981 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8.86 \end{bmatrix},$$

jonka rangi on $n = 3$. Siten systeemi on saavutettava ja tarkkailtava. Suljetun silmukan systeemin karakteristinen yhtälö on:

$$\det(sI - (A - BK)) = 0.$$

Valitaan systeemin navoiksi esimerkiksi $-10 \pm 10i$ ja -50. Matriisi K voitaisiin hakea kuten edellisessäkin tehtävässä, mutta se voidaan myös löytää suoraan Matlabin funktiolla place, jolloin saadaan

$$K = \begin{bmatrix} -88.8034 & -2.4619 & -0.3000 \end{bmatrix}.$$

d) Nyt tuodaan lisäksi systeemiin ulkoinen referenssisignaali r, jolla pyritään ohjaamaan järjestelmän toimintaa. Tämä ohjaus tapahtuu kertomalla referenssisignaali matriisilla N, jolloin saamme systeemin

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + Nr) = (A - BK)x + BNr.$$

Jos r on vakio, on myös x:n vakioiduttava. Siten

$$\dot{x} = (A - BK)x + BNr = 0,$$

ja

$$x = -(A - BK)^{-1}BNr.$$

Tällä säätimellä pyritään ohjaamaan systeemiä siten, että sen ulostulo vastaa referenssiä, eli

$$r = y = Cx = -C(A - BK)^{-1}BNr.$$

Tässä tehtävässä on vain yksi ulostulo ja yksi ohjaus, jolloin ehto toteutuu kun valitaan

$$N = -(C(A - BK)^{-1}B)^{-1}.$$

Näillä merkinnöillä saadaan systeemi

$$\dot{x} = (A - BK)x + BNr.$$

Simuloidaan tätä systeemiä.

e) Nyt kokeillaan mielivaltaista referenssisignaalia r. Käyttämällä skriptiä las06t4e.m nähdään, että säätö toimii jotenkuten, mutta ulostulon ja referenssitrajektorin väliin jää pieni poikkeama.