

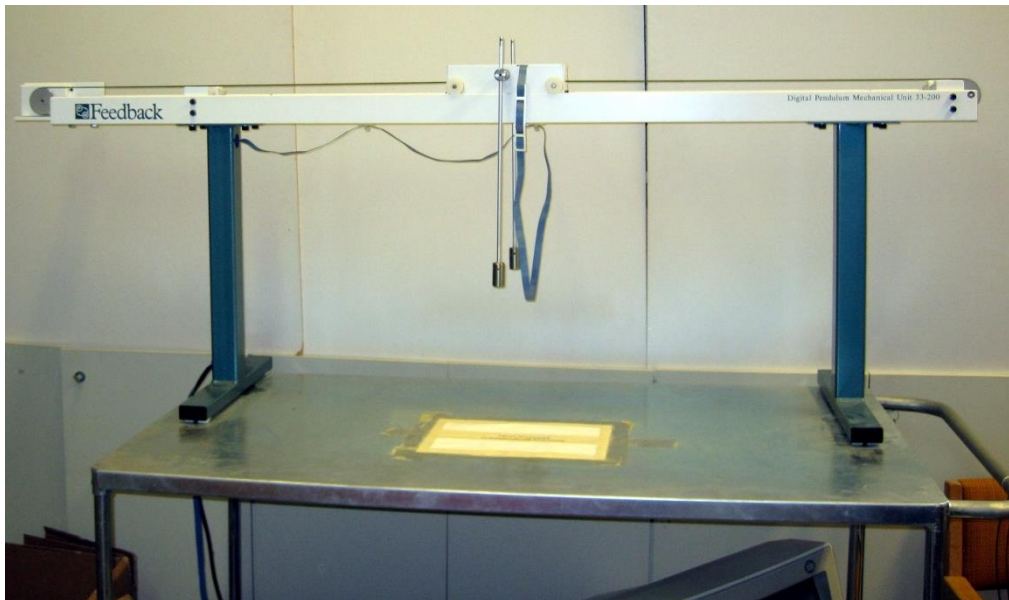
Aalto-yliopisto  
Perustieteiden korkeakoulu  
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-E2129 Systemien identifiointi

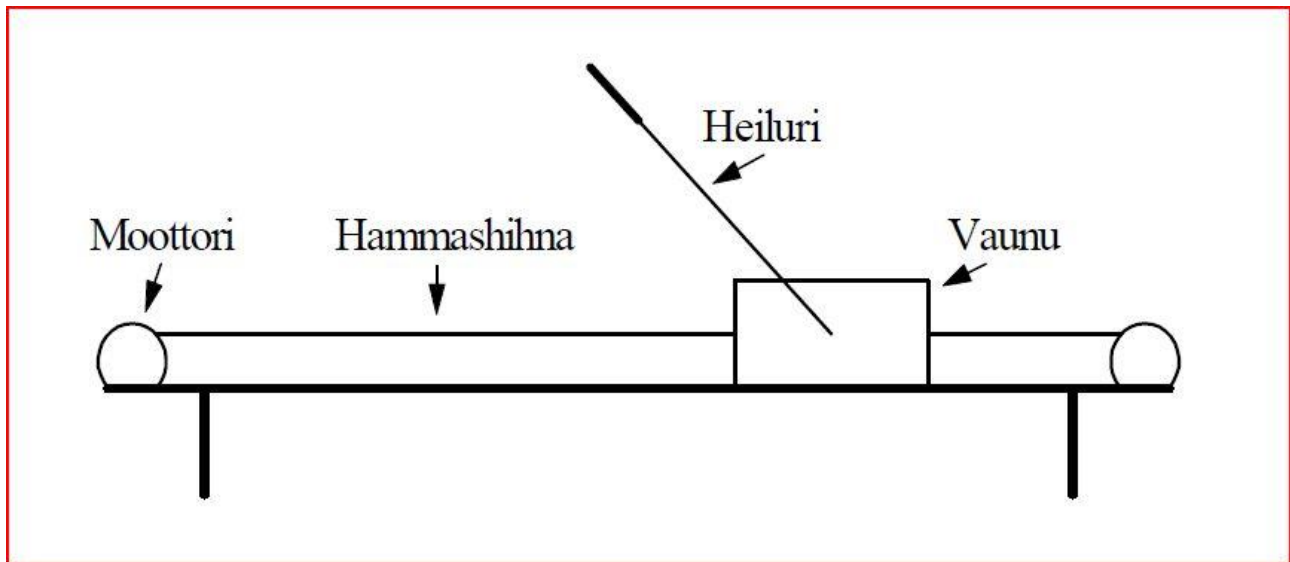
3. Harjoitustyö – Heiluri-vaunusysteemin parametrien estimointi

## Taustaa

Systemianalyysin laboratoriossa on opetus- ja demonstraatiokäyttöön tarkoitettu heilurirata, jolla voi tutkia mm. erilaisia ohjausalgoritmeja. Heilurirata koostuu vaakasuoraan pyörillä liikkuvasta vaunusta ja tähän kiinnitetystä vapaasti heiluvasta heilurista. Vaunu on kytketty hammashihnalla tasavirtamoottoriin, jolla siihen voidaan kohdistaa halutun suuruinen vaunun liikkeen suuntainen ohjausvoima. Heiluriradan päässä on pulssianturi, joka mittaa vaunun paikkaa. Vaunussa on vastaavanlainen anturi, joka mittaa heilurin asentoa. Molemmat anturit ovat inkrementaalisia eli ne mittaavat itse asiassa paikan ja kulman muutoksia, jotka välitetään I/O-kortin avulla tietokoneelle, jossa vaunun ja heilurin hetkelliset paikat ja nopeudet voidaan laskea. Heilurirata on esitetty Kuvassa 1, ja sen periaatepiirros on esitetty Kuvassa 2.



Kuva 1: Systemianalyysin laboratoriossa löytyvä heilurirata.



Kuva 2: Periaatepiirros heiluriradasta.

Systeemille voidaan johtaa fysiikan lakien avulla epälineaarinen differentiaaliyhtälömalli, joka sisältää parametreina heilurin varren pituuden, vaunun ja heilurin massat, sekä vaunun liikettä ja heilurin pyörimistä vastustavat kitkatermi. Tämän harjoitustyön tarkoituksena on estimoida tuntemattomat kitkaparametrit datan avulla, joka on kerätty todellisesta heilurisysteemistä päästämällä systeemi jostain alkutilasta vapaasti heilumaan (ohjaus  $u = 0$ ). Työssä siis systeemin malli on johdettu fysikaalisilla perusteilla, eikä sopivaa mallirakennetta tarvitse identifioida (katso esim. Söderström-Stoica, sivu 4-5, kappale ”Mathematical modelling and system identification”).

Usein epälineaariset mallit kirjoitetaan suljetussa muodossa systeemin dynamiikkaa kuvaavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisuna. Tässä työssä differentiaaliyhtälöitä ei kuitenkaan voida analyttisesti ratkaista, ja näin ollen parametrit täytyy estimoida sovittamalla differentiaaliyhtälöistä numeerisesti laskettu ratkaisu todelliseen havintoaineistoon.

## Heilurin fysikaalinen malli

Systeemin tila voidaan kuvata neljällä tilamuuttujalla:

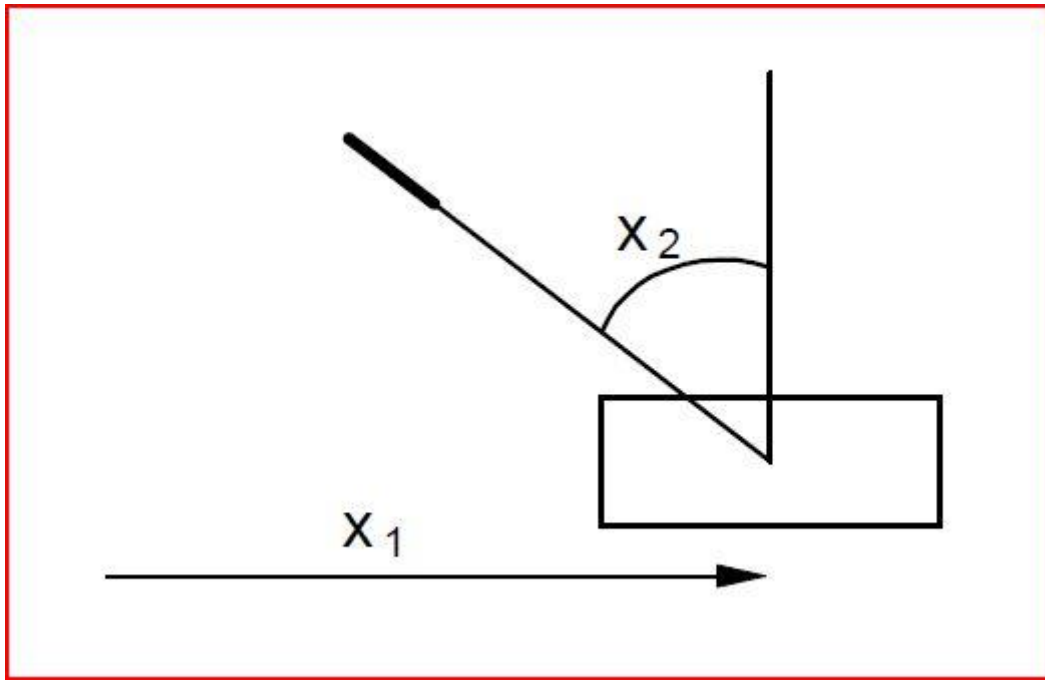
$x_1$  = vaunun paikka

$x_2$  = heilurin kulma

$x_3$  = vaunun nopeus

$x_4$  = heilurin kulmanopeus

Näistä muuttujat  $x_1$  ja  $x_2$  on esitetty Kuvassa 3.



Kuva 3: Tilamuuttujat  $x_1$  ja  $x_2$ .

Mallissa tarvitaan seuraavia parametreja:

$m_c$  = vaunun massa

$m_p$  = heilurin massa

$l$  = heilurin varren pituus

$u$  = vaunun liikeradan suuntainen ulkoinen voima (ohjaus)

$f_c$  = vaunun liikkeen kitkaparametri

$f_p$  = heilurin pyörimisen kitkaparametri

Tehdään oletus, että vaunun ja heilurin massat ovat pistemäisiä ja heilurin varren massa on nolla. Oletetaan lisäksi, että vaunun liikkeen kitkavoima on suoraan verrannollinen vaunun nopeuteen ja heilurin pyörimisen kitkamomentti on suoraan verrannollinen pyörimisnopeuteen. Laskujen helpottamiseksi sisällytetään heilurin varren pituus (joka on vakio) kertoimeen, jolloin kitkat vaikuttavat seuraavalla tavalla:

$$F_c = -f_c x_3$$

$$F_p = \frac{M_p}{l} = \frac{-f_p l x_4}{l} = -f_p x_4$$

missä  $F_c$  on vaunuun kohdistuva sen liikkeeseen nähden vastakkaisuuntainen voima ja  $F_p$  on heiluriin kohdistuva pyörimisliikettä vastustava voima ja  $M_p$  vastaava momentti. Systeemille on valmiiksi johdettu seuraavat tilayhtälöt, eli niitä ei tarvitse itse johtaa tai vahvistaa.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_3 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_4 \\
\frac{dx_3}{dt} &= \frac{m_p g \cos x_2 \sin x_2 - f_p x_4 \cos x_2 - l m_p x_4^2 \sin x_2 - f_c x_3 + u}{m_p \sin^2 x_2 + m_c} \\
\frac{dx_4}{dt} &= \frac{(m_p + m_c) g \sin x_2 - m_p l x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 - f_c x_3 \cos x_2 - f_p x_4 \frac{m_c + m_p}{m_p} + \cos x_2 u}{l(m_p \sin^2 x_2 + m_c)}
\end{aligned} \tag{1}$$

## Systeemin parametrien estimointi

Työssä halutaan siis estimoida epälineaarisen differentiaaliyhtälösystemin

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), c, t), x(0) = x_0 \tag{2}$$

parametrivektori  $c = [f_c \quad f_p]$  siten, että ratkaisu  $x(t)$  sopii mahdollisimman hyvin todellisesta systeemistä mitattuun dataan.

Olkoon systeemin tila mitattu tiettyinä ajanhetkinä  $t = 1, \dots, n$ . Sovituksen hyvyyden mittariksi voidaan valita neliövirhe:

$$V(c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \left( x(t_i; c) - x_{ref}(t_i) \right)^T R \left( x(t_i; c) - x_{ref}(t_i) \right) \right] \tag{3}$$

missä:

$x_{ref}(t_i)$  = todellisen systeemin mitattu tila hetkellä  $t_i$ .

$x(t_i; c)$  = yhtälön (2) antama ratkaisu hetkellä  $t_i$ , parametreilla  $c$  ja alkuarvolla  $x_0 = x_{ref}(t_0)$ .

$R$  = symmetrinen positiividefiniitti painomatriisi.

Pyrkimyksenä on siis löytää estimaattivektori

$$\tilde{c} = \underset{c}{\operatorname{argmin}} V(c)$$

## Tiedostot

Harjoitustyötä varten on annettu valmiiksi seuraavat tiedostot. Tutustu niihin huolellisesti.

- estim.m
- pendobj.m
- pendode.m
- optpar.m
- virhepinta.m
- data1.mat, data2.mat, data3.mat, data4.mat

## Tehtävät

1. Lausu systeemin tila hetkellä  $t_i$  tilayhtälön avulla (Siis kuinka  $x(t_i)$  saadaan laskettua differentiaaliyhtälösystemistä (2), kun alkutila on  $x(t_0)$ ? Periaatteen esittäminen riittää).
2. Osoita, että mikäli ohjaus  $u = 0$  ja massoja  $m_c$  ja  $m_p$  ei tunneta, ei parametrien arvoja voida yksikäsitteisesti estimoida. Toisin sanoen, jos mallin tuntemattomana parametrivektorina on  $c = [m_c \ m_p \ f_c \ f_p]$ , ei seuraava implikaatio päde:

$$f(x, c^*, t) = f(x, c, t) \ \forall x, \forall t \rightarrow c^* = c$$

Osoita, että jos massat tunnetaan ja  $c = [f_c \ f_p]$ , implikaatio kuitenkin pätee.

3. Matlab-ajotiedosto `virhepinta.m` piirtää annetulla testidatalla kriteerifunktion (3) arvojen muodostaman pinnan eri kitkaparametrin arvoilla. Tiedostoissa `data1.mat`, ..., `dataN.mat` on valmiiksi kerättyä dataa todellisen heilurin käyttäytymisestä erilaisilla koesuunnitelmilla. Ohjaus  $u = 0$  kaikissa aineistoissa. Data on annettu matlab-muuttujatiedostoina, joissa muuttujan nimi on tiedoston nimi (esim. `load data3.mat` lataa muuttujan `data3`).

Testidata tulee määritellä matriisissa `x_ref`, jossa jokainen sarake on yksi trajektorin piste, ja data on riveittäin seuraavasti:

1. rivi: vaunun paikka
2. rivi: heilurin kulma
3. rivi: vaunun nopeus
4. rivi: heilurin kulmanopeus
5. rivi: aika

Mieti miten painomatriisi  $R$  kannattaa valita (helpointa on tietysti käyttää diagonaalimatriisia, jossa diagonaalialkiot painottavat sopivasti eri tilamuuttujien virheitä).

Tutki virhepinnan muotoa erilaisilla datoilla. Miten estimointiaineisto vaikuttaa virhepinnan muotoon (vertaa esim. aineistoa, jossa heiluri heiluu pienellä amplitudilla ja aineistoa, jossa heiluri pyörii vauhdilla akselinsa ympäri)? Voit ottaa datasta lyhyempiä pätkiä tai harventaa aikapisteitä (esim. `x_ref=data3(:,101:200)` ottaa datan keskeltä 100 aikapistettä). Mitä voit virhepinnan muodon perusteella päätellä estimoinnin tarkkuudesta? Minkälainen data kannattaa mielestäsi valita estimointiin? (Jos laskut kestävät liian kauan, voit harventaa aikapisteitä ja pisteistöä, jossa virhefunktio lasketaan)

Parametriestimoinnissa pyritään löytämään virhepinnan minimi. Matlab-ajotiedostossa `estim.m` on ohjelmapiirros, joka minimoi funktion (3) kitkaparametrien suhteen. Algoritmi ei käytä analyyttisesti laskettuja kohdefunktion gradientteja, vaan laskee ne numeerisesti differenssiaprosimaatiolla. Datapisteiden määrä ei ole rajoitettu, mutta pisteiden lukumäärän kasvattaminen hidastaa luonnollisesti optimointia.

Estimoi kitkaparametrit muokkaamalla ohjelmatiedostoa haluamallasi tavalla ja käyttämällä erilaisia estimointidatoja. Löytääkö estimointialgoritmi virhefunktion minimin (vrt. virhepinnan tarkastelu)? Vaihtelevatko estimaattejen arvot paljon eri datoilla?

4. Valitse estimaatit ja mieti miten voisit validoida mallin käyttämällä eri dataa kuin estimoinnissa. Jos et saa tyydyttävää tulosta, esimerkiksi jos eri datoilla saat kovin erilaisia estimaatteja kitkakertoimien arvoille, pohdi mahdollisia syitä.