Differentiaali- ja integraalilaskenta 1: tiivistelmä ja oheislukemista

Pekka Alestalo

4. syyskuuta 2014

Tähdellä merkityt kohdat on tarkoitettu lähinnä oheislukemistoksi. Lisäksi mukana on joitakin lukiota kertaavia kohtia, joista kaikkia ei käsitellä luennolla.

1 Funktiot

1.1 Merkintöjä

- Reaalilukujen joukko $\mathbf{R}$, symbolisesti $]-\infty, \infty[$. Sen alkioita kutsutaan usein pisteiksi.
- Avoin väli $]a, b[$ tai $]a, \infty[$ tai $]-\infty, b[$ tai $]-\infty, \infty[$.
- Suljettu väli $[a, b]$.
- Puoliavoimet välit: muotoa $[a, b[$ tai $]a, b]$.

1.2 Funktion määrittely

- Funktio $f\colon A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon a täsmälleen yhden B:n alkion b. Merkitään $b = f(a)$.
- Tässä $A = M_f$ on f:n **määrittelyjoukko** ja B on f:n **maalijoukko**.
- Funktion f **arvojoukko** (eli kuvajoukko) on B:n osajoukko $f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$.
- Esimerkiksi funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, maalijoukko on $\mathbf{R}$, mutta sen arvojoukko on $[0, \infty[$.
- Edellisen esimerkin funktio voidaan toki määritellä suoraan muodossa $f\colon \mathbf{R} \to [0, \infty[$, $f(x) = x^2$, jolloin arvojoukko on sama kuin maalijoukko. Näin voidaan periaatteessa menetellä kaikkien funktioiden kohdalla, mutta se ei yleensä ole käytännöllistä. Esimerkki: Yritä tehdä sama funktiolle $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^6 + x^2 + x$, $x \in \mathbf{R}$.
- Jos funktion määrittelyjoukko $A \subset \mathbf{R}$, niin kyseessä on yhden muuttujan funktio, joita tällä kurssilla käsitellään.

- Jos $A \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, niin kyseessä on usean muuttujan funktio, joita käsitellään kursseilla Differentiaali- ja integraalilaskenta 2–3.

1.3 Funktion jatkuvuus

- Funktion jatkuvuus määritellään usein raja-arvon avulla. Jatkuvuus on kuitenkin raja-arvoa yksinkertaisempi käsite, joten aloitamme sillä.

- Muista: Jos $a, b \in \mathbf{R}$, niin lauseke $|a - b|$ on pisteiden a ja b välinen etäisyys.

- Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ ja $f\colon A \to \mathbf{R}$ funktio. Funktio f on **jatkuva pisteessä** $a \in A$, kun pätee:
  Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ aina kun } x \in A \text{ ja } |x - a| < \delta.$$

- Piirrä havainnollinen kuva!

- Usein funktion määrittelyjoukko A on jokin väli. Tällöin jatkuvuutta voidaan tutkia määritelmän avulla myös väliin kuuluvassa päätepisteessä; ehto $x \in A$ on olennainen.

- Jos f on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä, niin se on **jatkuva joukossa** A (tai lyhyesti: jatkuva).

- Jatkuvia funktioita ovat esim.
  - polynomit: $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$;
  - rationaalifunktiot: $R(x) = P(x)/Q(x)$, kun P ja Q ovat polynomeja;
  - juurifunktiot: $f(x) = x^{p/q}$, kun $x \geq 0$;
  - trigonometriset funktiot sin, cos, tan ja cot;
  - jatkuvien funktioiden summat, tulot ja osamäärät (määrittelyjoukko!);
  - jatkuvien funktioiden yhdistetyt funktiot.

1.4 Jatkuvien funktioiden ominaisuuksia

- Olkoon $f\colon A \to \mathbf{R}$. Funktiolla f on **maksimi** eli suurin arvo pisteessä $a_0 \in A$, jos $f(a) \leq f(a_0)$ kaikilla $a \in A$. Vastaavasti f:llä on **minimi** eli pienin arvo pisteessä $a_1 \in A$, jos $f(a) \geq f(a_1)$ kaikilla $a \in A$. Muuttujan arvot a_0 ja a_1 ovat funktion f **ääriarvokohtia**. Funktion arvot $f(a_0)$ ja $f(a_1)$ ovat funktion **ääriarvot**.

- I perustulos: Suljetulla välillä määritellyllä jatkuvalla funktiolla on maksimi ja minimi joissakin välin pisteissä.

- II perustulos (Jatkuvien funktioiden väliarvolause): Suljetulla välillä I määritelty jatkuva funktio saa kaikki arvot, jotka ovat sen minimin ja maksimin välissä. Toisin sanoen: funktion arvojoukko $f[I]$ on myös väli. Tässä muodossa väite pätee myös avoimille tai puoliavoimille väleille I (jolloin maksimia tai minimiä ei aina ole).

- Erityisesti: Jos $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja $f(a)f(b) < 0$, niin funktiolla f on nollakohta avoimella välillä $]a,b[$.

- Näitä asioita käsitellään yleisemmin kurssilla MS-C1540 Euklidiset avaruudet, jossa ne myös todistetaan.

1.5 Funktion raja-arvo

- Jos $A \subset \mathbf{R}$ ja $f\colon A \to \mathbf{R}$, niin f:n käyttäytymistä pisteen $x_0 \in \mathbf{R}$ lähellä voidaan tutkia myös funktion arvosta $f(x_0)$ välittämättä; ei edes tarvitse olla $x_0 \in A$. Tällöin puhutaan funktion f raja-arvosta pisteessä x_0.

- Määrittelemme raja-arvon vain sellaisissa pisteissä $x_0 \in \mathbf{R}$, joille jokainen väli $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä, vaikka $\delta > 0$ olisi kuinka pieni tahansa. (Tällaisia pisteitä x_0 kutsutaan joukon A kasautumispisteiksi.)

- Funktiolla $f\colon A \to \mathbf{R}$ on **raja-arvo L pisteessä $x_0 \in \mathbf{R}$**, jos pätee: Jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että
$$|f(x) - L| < \varepsilon \ \text{ aina kun } x \in A \ \text{ ja } \ 0 < |x - x_0| < \delta.$$
Tällöin merkitään
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

- Huomaa: Ehdon $0 < |x - x_0|$ ainoa tarkoitus on rajata mahdollinen funktion arvo $f(x_0)$ pois käsittelystä; ts. ehtoa tutkitaan vain tapauksessa $x \neq x_0$.

- Vastaavalla tavalla saadaan myös **toispuoleiset raja-arvot**
$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \ \text{ ja } \ \lim_{x \to x_0-} f(x),$$
kun epäyhtälö $0 < |x - x_0| < \delta$ korvataan epäyhtälöllä $0 < x - x_0 < \delta$ tai $0 < x_0 - x < \delta$. Nämä voidaan tulkita myös tavallisen raja-arvon erikoistapauksina, kun funktion määrittelyjoukoksi muutetaan $A \cap]x_0, \infty[$ tai $A \cap]-\infty, x_0[$.

- Tällöin on voimassa: Raja-arvo
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
on olemassa täsmälleen silloin, kun
$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = L.$$

- Funktion raja-arvo toteuttaa seuraavat laskusäännöt: Jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b,$$

niin

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = a+b, \; \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab, \; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b};$$

viimeisen kohdalla täytyy olettaa $b \neq 0$ (jolloin $g(x) \neq 0$ jossakin pisteen x_0 ympäristössä).

- Jos funktion määrittelyjoukko on väli, niin jatkuvuus pisteessä $x_0 \in M_f$ on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Jos $f\colon A \to \mathbf{R}$ on jatkuva, $x_0 \notin A$ ja $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, niin voidaan määritellä uusi funktio $\overline{f}\colon \overline{A} \to \mathbf{R}$, $\overline{A} = A \cup \{x_0\}$, asettamalla

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in A, \\ L, & \text{kun } x = x_0. \end{cases}$$

Tällöin $\overline{f}$ on jatkuva. Usein merkitään hiukan epätäsmällisesti $f = \overline{f}$.

- Tyypillinen esimerkki:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

on jatkuva koko reaaliakselilla.

- Myös seuraavat käsitteet voidaan määritellä täsmällisesti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty, \; \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = L, \; \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad \text{jne.}$$

- Esimerkiksi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

jos pätee: Jokaista $M \in \mathbf{R}$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) > M \quad \text{aina kun } x \in A \text{ ja } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

2 Derivaatta

2.1 Määritelmä ja perusominaisuudet

- Erilaisia lähestymistapoja: geometrinen (käyrän tangentti sekanttien raja-asentona) tai fysikaalinen (ajasta riippuvan funktion hetkellinen muutosnopeus).

- Funktio f määritelty jossakin pisteen $x_0 \in \mathbf{R}$ ympäristössä; sen derivaatta on
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$
jos raja-arvo olemassa. Funktio on derivoituva, jos sillä on derivaatta jokaisessa määrittelyjoukon (= avoin väli) pisteessä. Merkintöjä:
$$f'(x) = Df(x) = \frac{df}{dx}.$$

- Derivaatan määritelmä johtaa approksimaatioon
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
Oikean puoleinen lauseke on funktion f **linearisointi** eli **differentiaali** pisteessä x_0. Sille käytetään merkintää df. Linearisoinnin kuvaaja $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on funktion kuvaajan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ asetettu tangenttisuora.

- Fysikaalinen tulkinta: $x = x(t)$ kappaleen yksiulotteisen liikeen paikkakoordinaatti hetkellä t, sen hetkellinen nopeus on $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t)$. Näistä viimeinen on tavallinen merkintä fysiikassa.

- Laskusääntöjä:

  - Lineaarisuus
    $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
    $D(cf(x)) = cf'(x)$, kun $c \in \mathbf{R}$ on vakio
  - Tulon derivoimissääntö
    $$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
  - Osamäärän derivoimissääntö
    $$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
  - Yhdistetyn funktion derivoiminen (Chain Rule = ketjusääntö; nimen tausta liittyy osittaisderivaattoihin, joista lisää kurssilla Differentiaali- ja integraalilaskenta 2)
    $$D(f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

- Eräitä derivaattoja:
  $D(\text{vakiofunktio}) = 0$,
  $D(x^r) = rx^{r-1},\ \ r \neq 0$,
  $D(\sin x) = \cos x$,
  $D(\cos x) = -\sin x$

- Väliarvolause: Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ jatkuva ja lisäksi derivoituva välillä $]a,b[$. Tällöin on olemassa sellainen piste $c \in]a,b[$, että

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \quad \text{ts.} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

- Seuraus: Jos $f'(x) = 0$ kaikissa avoimen välin pisteissä x, niin funktio f on vakio tällä välillä

- Seuraus: Jos $f'(x) \geq 0$ jollakin välillä, niin f on kasvava;
  jos $f'(x) \leq 0$ jollakin välillä, niin f on vähenevä

- Jos edellisen kohdan lisäksi $f'(x) = 0$ ainoastaan yksittäisissä pisteissä, niin f on aidosti kasvava/vähenevä. Esim: $f(x) = x^3$.

2.2 L'Hospitalin sääntö

- Raja-arvojen laskeminen derivaatan avulla; erilaisia versioita mm. tyyppiä "0/0" tai "∞/∞" oleville raja-arvoille; myös toispuoleisille.

- Tärkein tapaus: Oletetaan, että $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ja funktiot f, g ovat derivoituvia. Jos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  on olemassa, niin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2.3 Ääriarvotehtävät

- Paikallinen ääriarvo = paikallinen maksimi tai minimi; voi esiintyä myös määrittelyvälin päätepisteessä.

- Paikallinen ääriarvo voi tulla (i) derivaatan nollakohdassa (ii) määrittelyvälin päätepisteessä, tai (iii) kohdassa jossa funktio ei ole derivoituva.

- Jos tiedetään etukäteen, että funktiolla on maksimi/minimi, niin etsitään kaikki mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat (vrt. edellinen), lasketaan niissä funktion arvot ja **valitaan** näistä suurin/pienin.

2.4 Kuperuus*

- Kupera eli konveksi alue $D \subset \mathbf{R}^2$: jos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, niin myös niiden välinen yhdysjana $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset D$

- Välillä $I \subset \mathbf{R}$ määritelty funktio on konveksi, jos sen kuvaajan yläpuolinen tasoalue on konveksi; tähän riittää se että kuvajalle piirretyt sekantit ovat aina kuvaajan yläpuolella, kaavana

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

  kaikilla $x, y \in I$ ja kaikilla $t \in [0, 1]$.

- Erityisesti: jos $f''(x) \geq 0$ koko välillä, niin f on konveksi

- Funktion käännepiste: kohta, jossa kuvaajalla on tangentti ja funktion kuperuussuunta vaihtuu. Esimerkiksi, jos $f''(x)$ vaihtaa merkkiä.

- Kuperuutta tutkimalla päädytään seuraavaan tulokseen: jos funktion f derivaatan nollakohdassa x_0 on $f''(x_0) < 0$, niin kyseessä on paikallinen maksimi; jos $f''(x_0) > 0$, niin kyseessä on paikallinen minimi. Tapauksessa $f''(x_0) = 0$ tilannetta täytyy tutkia tarkemmin (esimerkiksi korkeamman kertaluvun derivaattojen avulla).

3 Taylor-polynomit

3.1 Taylor-polynomi

- Taylor-polynomi $P_n(x; x_0)$ = funktion paras n-asteinen polynomiapproksimaatio (derivoinnin kannalta) pisteen x_0 lähellä. Maclaurin-polynomi: tapaus $x_0 = 0$.

- Jos f on n kertaa derivoituva pisteessä x_0, niin polynomilla

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x; x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

  on pisteessä x_0 samat derivaatat kuin f:llä kertalukuun n saakka.

- Taylorin kaava: Jos derivaatta $f^{(n+1)}$ on olemassa ja se on jatkuva funktio, niin $f(x) = P_n(x; x_0) + E_n(x)$ ja virhetermille $E_n(x)$ pätee

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

jossakin pisteessä $\xi \in [x_0, x]$ (tai $[x, x_0]$). Jos on olemassa indeksistä n riippumaton vakio M, jolle $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ jollakin välillä, niin tällöin

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$ ja x on kiinteä.

- Eräitä Maclaurin-polynomiapproksimaatioita:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\
\ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \\
\sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
\cos x &\approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}
\end{aligned}$$

3.2 Newtonin menetelmä

- Ensimmäisen asteen Taylor-polynomi $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ on sama kuin funktion f linearisointi pisteen x_0 suhteen. Sitä voidaan käyttää erilaisissa arvioissa ja numeerisissa menetelmissä.

- Newtonin menetelmä: Yhtälö $f(x) = 0$ ratkaistaan likimääräisesti valitsemalla alkupiste x_0 (esimerkiksi kuvion perusteella) ja määrittelemällä

  $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

  kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ Näin saadaan lukujono $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, jonka termit yleensä antavat yhä parempia likiarvoja funktion f nollakohdalle.

- Palautuskaava perustellaan geometrisesti etsimällä funktion nollakohtaa sen linearisoinnin (eli tangentin) avulla.

3.3 Taylor-sarja*

- Jos Taylorin kaavan virhetermi $E_n(x)$ lähestyy nollaa, kun n kasvaa, saadaan Taylor-polynomin raja-arvona funktion f Taylor-sarja (tai Maclaurin-sarja, jos $x_0 = 0$).

- Taylor-sarja on siis muotoa

  $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

  Tämä on esimerkki yleisestä *potenssisarjasta*, joita käsitellään kurssin lopussa. Niitä esiintyy kuitenkin monien alkeisfunktioiden yhteydessä, joten jo tässä lyhyt yhteenveto.

- Potenssisarja on muotoa
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$$
oleva sarja. Piste x_0 on sarjan keskus ja luvut c_k sarjan kertoimia.
- Sarja *suppenee* arvolla x, jos yllä oleva raja-arvo on määritelty. Tämän suhteen on vain kolme erilaista tapausta:
  - sarja suppenee vain arvolla $x = x_0$ (jolloin sarjassa esiintyy vain vakiotermi c_0)
  - sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$
  - sarja suppenee jollakin välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ (ja mahdollisesti yhdessä tai molemmissa päätepisteissä) mutta hajaantuu muilla x:n arvoilla.
- Viimeisessä kohdassa esiintyvä luku R on potenssisarjan suppenemissäde; sovitaan lisäksi, että $R = 0$ tai $R = \infty$ muissa tapauksissa.
- Suppenemisvälillä I tulee siis määriteltyä funktio $f\colon I \to \mathbf{R}$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k,$$
joka on nimeltään sarjan summafunktio.
- Potenssisarjan summafunktio f on välillä $]x_0 - R, x_0 + R[$ jatkuva ja derivoituva. Lisäksi derivaatan $f'(x)$ voi laskea derivoimalla sarjaa termeittäin:
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-x_0)^{k-1}.$$
- Esimerkkejä (joista osaan palataan myöhemmin):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1 \\
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbf{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbf{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbf{R} \\
(1+x)^r &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!} x^k, \quad |x| < 1
\end{aligned}$$

Viimeinen on nimeltään binomisarja ja se on voimassa kaikilla $r \in \mathbf{R}$. Jos $r \in \mathbf{N}$, niin sarjan kertoimet ovat nollia summausindeksistä $k = r + 1$ lähtien ja tuloksena on *binomikaava*.

4 Alkeisfunktiot

4.1 Käänteisfunktio

- Funktio $f\colon A \to B$ on
  - **injektio**, jos eri pisteissä saadaan eri arvot, ts.
    $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ts.
    $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
  - **surjektio**, jos arvojoukko on sama kuin maalijoukko, ts. $fA = B$.
  - **bijektio**, jos se on sekä injektio että surjektio.
- Huom: Funktiosta tulee surjektio, kun maalijoukko kutistetaan mahdollisimman pieneksi, eli jätetään pois kaikki ne pisteet, jotka eivät ole funktion arvoja.
- Toinen tapa määritellä nämä käsitteet perustuu yhtälön ratkaisujen lukumäärän tutkimiseen: Jos $y \in B$ on kiinteä, niin yhtälöllä $y = f(x)$ on
  - korkeintaan yksi ratkaisu $x \in A$, jos f on injektio
  - ainakin yksi ratkaisu, jos f on surjektio
  - täsmälleen yksi ratkaisu, jos f on bijektio.
- Jos $f\colon A \to B$ on bijektio, niin sillä on **käänteisfunktio** $f^{-1}\colon B \to A$, joka määräytyy ehdosta $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
- Käänteisfunktiolle pätee $f^{-1}(f(a)) = a$ kaikilla $a \in A$ ja $f(f^{-1}(b)) = b$ kaikilla $b \in B$.
- Käänteisfunktion kuvaaja on alkuperäisen kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen. Perustelu: piste (a, b) on funktion f kuvaajalla $\Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow$ piste (b, a) on funktion f^{-1} kuvaajalla. Lisäksi operaation $(a, b) \mapsto (b, a)$ geometrinen tulkinta on peilaus suoran $y = x$ suhteen.
- Jos $A \subset \mathbf{R}$ ja $f\colon A \to \mathbf{R}$ on aidosti monotoninen, niin funktiolla $f\colon A \to f[A]$ on käänteisfunktio.
- Jos yllä A on väli ja f on jatkuva, niin myös f^{-1} on jatkuva joukossa $f[A]$.
- Käänteisfunktion derivaatta: $f\colon\ ]a, b[\to]c, d[$ aidosti monotoninen surjektio, jolloin f:llä on käänteisfunktio $f^{-1}\colon\ ]c, d[\to]a, b[$. Tällöin kuvaajat $y = f(x)$ ja $y = f^{-1}(x)$ ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen ja
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

jos $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$. Huom: $f'(f^{-1}(x))$ = funktion f derivaatta laskettuna pisteessä $f^{-1}(x)$.

4.2 Trigonometriset funktiot

- Kulman yksikkö radiaani = rad: kulmaa vastaavan yksikköympyrän osan kaarenpituus.
- π rad = 180 astetta, ts. 1 rad = $180/\pi \approx 57{,}3$ astetta
- Funktiot $\sin x$, $\cos x$ määritellään yksikköympyrän avulla niin, että $(\cos x, \sin x)$, $x \in [0, 2\pi]$, on yksikköympyrän parametrisointi kaarenpituuden x avulla.

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \ (x \neq \pi/2 + n\pi), \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \ (x \neq n\pi) \end{aligned}$$

- Jaksollisuus:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x, \ \cos(x + 2\pi) = \cos x, \\ \tan(x + \pi) &= \tan x \end{aligned}$$

- Ominaisuuksia:

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, \ \sin(\pi/2) = 1, \ \cos 0 = 1, \ \cos(\pi/2) = 0, \\ \sin(-x) &= -\sin x, \ \cos(-x) = \cos x, \ \tan(-x) = -\tan x, \\ \sin^2 x &+ \cos^2 x = 1, \end{aligned}$$

- Yhteenlaskukaavat:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

- Derivaatat:

$$D(\sin x) = \cos x, \quad D(\cos x) = -\sin x$$

- Edellisestä seuraa, että molemmat funktiot $y(t) = \sin \omega t$ ja $y(t) = \cos \omega t$ toteuttavat *differentiaaliyhtälön*

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0,$$

  joka kuvaa ns. harmonista värähtelyä. Tässä muuttuja t on aika ja vakio $\omega > 0$ on värähtelyn kulmataajuus. Kuten myöhemmin nähdään, differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

  jossa A, B ovat vakioita. Ne määräytyvät yksikäsitteisesti, jos tunnetaan esimerkiksi alkutila $y(0)$ ja alkunopeus $y'(0)$. Kaikki ratkaisut ovat jaksollisia ja niiden jaksonaika on $T = 2\pi/\omega$.

4.3 arcus-funktiot

- Trigonometrisilla funktioilla on käänteisfunktio, jos funktioiden määrittely- ja maalijoukkoja rajoitetaan sopivalla tavalla.

- Sini-funktio
$$\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$$
on aidosti kasvava bijektio.

- Kosini-funktio
$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$$
on aidosti vähenevä bijektio.

- Tangentti-funktio
$$\tan\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$$
on aidosti kasvava bijektio.

- Käänteisfunktiot:
$$\begin{aligned} \arctan x &\in\ ]-\pi/2, \pi/2[, \quad \text{kun } x \in \mathbf{R}, \\ \arcsin x &\in [-\pi/2, \pi/2], \quad \text{kun } x \in [-1, 1], \\ \arccos x &\in [0, \pi], \quad \text{kun } x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

- Siis:
$$\begin{aligned} x &= \tan\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \arctan x, \quad \text{kun } \alpha \in\ ]-\pi/2, \pi/2[\\ x &= \sin\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \arcsin x, \quad \text{kun } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2] \\ x &= \cos\alpha \Longleftrightarrow \alpha = \arccos x, \quad \text{kun } \alpha \in [0, \pi] \end{aligned}$$

- Huom: arc$* * *$ annetaan **radiaaneissa**, ellei kyseessä ole geometrinen sovellus.

- Käänteisfunktioiden derivaatat
$$\begin{aligned} D \arctan x &= \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbf{R} \\ D \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1 \\ D \arccos x &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1 \end{aligned}$$

4.4 Eksponentti- ja logaritmi

- Neperin luku

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \\ &\approx 2{,}718281828459\ldots \end{aligned}$$

- Eksponenttifunktio

$$f(x) = e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

  Määritelmä perustuu ominaisuuteen $f'(x) = f(x)$, jonka vuoksi eksponenttifunktio on tärkeä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa.

- Yhteys erilaisten määritelmien välillä on suoraviivainen, mutta pitkähkö lasku, joka sivuutetaan tällä kurssilla.

- Ominaisuuksia:

$$\begin{aligned} e^0 &= 1,\ e^x > 0 \text{ kaikilla } x,\ D(e^x) = e^x,\ e^{-x} = 1/e^x, \\ (e^x)^y &= e^{xy},\ e^x e^y = e^{x+y} \end{aligned}$$

- Logaritmifunktio = eksponenttifunktion käänteisfunktio:

$$\ln x,\ x > 0$$

- Ominaisuuksia

$$\begin{aligned} e^{\ln x} &= x,\ \ln(e^x) = x,\ \ln 1 = 0,\ \ln e = 1, \\ \ln(a^b) &= b\ln a,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b,\ D\ln|x| = 1/x,\ x \neq 0 \end{aligned}$$

- Eksponenttifunktion avulla voidaan ratkaista täydellisesti *differentiaaliyhtälö* $y' = ky$, kun k on vakio: Kaikki funktiot $y = y(x)$, joille on voimassa

$$y'(x) = ky(x) \quad \text{kaikilla} \quad x \in \mathbf{R},$$

  ovat muotoa $y(x) = Ce^{kx}$, jossa C on vakio. Vakio C kiinnittyy, jos funktion y arvo tunnetaan jossakin pisteessä x_0. Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisu on yksikäsitteinen.

4.5 Eulerin kaava

- Imaginaariyksikkö i: luku, joka toteuttaa $i^2 = -1$. Kompleksiluvut muotoa $z = x + iy$, jossa $x, y \in \mathbf{R}$. Katso tarkemmin erillistä monistetta kompleksiluvuista.

- Kun ensponenttifunktion sarjakehitelmään sijoitetaan muuttujan paikalle ix ja ryhmitellään termit sopivalla tavalla, niin saadaan **Eulerin kaava**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

- Seurauksena on kaava $e^{i\pi} + 1 = 0$, jota jotkut pitävät matematiikan hienoimpana kaavana. Se sitoo toisiinsa tärkeimmät luvut 0, 1, i, e ja π sekä kolme laskutoimitusta.

4.6 Hyperboliset funktiot

- Hyperbolinen sini *sinus hyperbolicus* sinh, hyperbolinen kosini *cosinus hyperbolicus* cosh ja hyperbolinen tangentti tanh:

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned}$$

- Ominaisuuksia: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$; kaikilla trigonometrisilla kaavoilla on hyperbolinen vastine, joka seuraa yhteyksistä $\sinh(ix) = i \sin x$, $\cosh(ix) = \cos x$. Kaavoissa $\sin^2$-termien merkki vaihtuu, muut pysyvät samoina.

- Derivaatat: $D \sinh x = \cosh x$, $D \cosh x = \sinh x$.

- Käänteisfunktiot; lyhenne ar viittaa sanaan area, sillä käänteisfunktioilla on geometrinen tulkinta eräänä hyperbeliin liittyvänä pinta-alana:

$$\begin{aligned}
\sinh^{-1} x &= \text{ar } \sinh x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ x \in \mathbf{R} \\
\cosh^{-1} x &= \text{ar } \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1
\end{aligned}$$

5 Integraali

5.1 Määritelmä ja ominaisuudet

- Olkoon $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva. Muodostetaan välin $[a, b]$ jako

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

ja siihen liittyvä yläsumma

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),\ M_k = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\},$$

ja alasumma

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),\ m_k = \min\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\}.$$

- Aina pätee:
  (i) $s \le S$,
  (ii) Kun jako tihenee, niin s kasvaa ja S pienenee.

- Funktio f on integroituva välillä $[a,b]$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen jako, jossa
$$S - s < \varepsilon.$$
  Funktion f integraali $I \in \mathbf{R}$ on tällöin se yksikäsitteinen luku, jolle $s \le I \le S$ kaikissa jaoissa; merkitään
$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

- Pätee: integraali on määritelty kaikille jatkuville funktioille ja se voidaan laskea raja-arvona
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$
  käyttämällä tasavälisiä jakopisteitä $x_k = a + k\Delta x$, jossa $\Delta x = (b-a)/n$ on askelpituus ja $0 \le k \le n$.

- Määritelmä yleistyy myös paloittain jatkuville funktioille (ja vieläkin yleisempään tilanteeseen)

- Sopimus:
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

- Ominaisuuksia: Lineaarisuus
  (i) $\displaystyle\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx$
  (ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
  kaikilla a, b, c järjestyksestä riippumatta.
  (iii) $\displaystyle f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
  Erityisesti $\pm f(x) \le |f(x)|$, joten
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

- Keskiarvoperiaate: jos f on jatkuva, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \text{ jollakin } c \in [a,b],$$

toisin sanoen

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \text{funktion } f \text{ keskiarvo välillä } [a,b]$$

- Analyysin peruslause: Jos $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

kaikilla $x \in]a,b[$.

- Seuraus: Jos $F'(x) = f(x)$ kaikilla x, ts. F on funktion f integraalifunktio, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} F(x) = F(x)\,\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

- Integraalifunktio ei ole yksikäsitteinen, mutta eri integraalifunktiot poikkeavat toisistaan ainoastaan vakiolla; merkitään

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \; C \in \mathbf{R} \text{ vakio},$$

jos $F'(x) = f(x)$

- Kaikilla jatkuvilla funktioilla on integraalifunktio, mutta sitä ei aina voida esittää alkeisfunktioiden avulla, vaikka f olisi alkeisfunktio; esim. $f(x) = e^{x^2}$

5.2 Epäoleellinen integraali

- Kaksi eri perustyyppiä:
Tyyppi I: Integroimisvälinä $[a,\infty[$ tai $]-\infty,b]$ tai koko $\mathbf{R}$
Tyyppi II: Funktio $f\colon\ ]a,b[\to \mathbf{R}$ ei ole rajoitettu tai sillä ei ole toispuoleisia raja-arvoja päätepisteissä

- Tyyppi I: Esim. $f\colon [a,\infty[\to \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx,$$

jos raja-arvo olemassa ja äärellinen.

- Jos $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva, niin
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx,$$
jos **molemmat** oikean puolen integraalit suppenevat
- Jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin pätee
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$
- Tyyppi II: poistetaan ongelmakohta ja tutkitaan raja-arvona; esim. $f :]a, b] \to \mathbf{R}$ jatkuva, mutta sillä ei äärellistä raja-arvoa, kun $x \to a+$. Tällöin
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$
jos raja-arvo on olemassa ja äärellinen. Tällöin sanotaan: epäoleellinen integraali **suppenee**; muuten se **hajaantuu**.
- Jos ongelmia molemmissa päätepisteissä tai välin sisällä, jaetaan $[a, b]$ niin moneen osaan, että kussakin osassa vain yksi ongelmakohta: vaaditaan, että jokainen erikseen antaa äärellisen tuloksen, jolloin koko integraali = osien summa

6 Integroinnin sovelluksia

6.1 Geometrisia sovelluksia

- Jos $f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f(x)\,dx$ on funktion kuvaajan ja x-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala välillä $[a, b]$
- Yleisemmin: jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$, niin $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ on kuvaajien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala
- Funktion kuvaajan $y = f(x)$ kaarenpituus välillä $[a, b]$ on
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$
- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri, niin saadun pyörähdyspinnan pinta-ala on
$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

- Jos kappaletta leikataan yz-tason suuntaisella tasolla kohdassa x ja poikkileikkauksen pinta-ala on $A(x)$, kun $x \in [a,b]$, niin kappaleen tilavuus on
$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$
- Kun funktion f kuvaaja $y = f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri, se rajaa pyörähdyskappaleen, jonka tilavuus on
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$
Yleisemmin: Jos $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ja kuvaajien $y = g(x)$ ja $y = f(x)$ välinen alue pyörähtää x-akselin ympäri, niin saadun kappaleen tilavuus on
$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx$$
Huom: Tulos **ei ole sama** kuin $\pi \int_a^b (f(x) - g(x))^2\,dx$
- Kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää y-akselin ympäri, niin vastaava tilavuus on
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

6.2 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt

- Integroinnin avulla voidaan ratkaista mm. seuraavat 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt:
- Lineaarinen differentiaaliyhtälö
$$y' + a(x)y = r(x),$$
jossa $a(x)$ ja $r(x)$ ovat jollakin avoimella välillä jatkuvia funktioita. Ratkaisu saadaan kertomalla yhtälö puolittain integroivalla tekijällä $e^{A(x)}$, jossa $A'(x) = a(x)$. Yleiseksi ratkaisuksi saadaan
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int e^{A(x)} r(x)\,dx,$$
jossa C on vakio.
- Separoituva differentiaaliyhtälö
$$y' = f(x)g(y)$$
voidaan ratkaista muuntamalla se (formaalisti) muotoon
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$
ja integroimalla. Menetelmän tarkempi perustelu vaatii sijoitusmenetelmän käyttöä, josta myöhemmin lisää.

- Differentiaaliyhtälöistä on erillinen moniste, jossa ratkaisumenetelmiä selitetään tarkemmin. Monien differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi tarvitaan myös uusia integroimismenetelmiä.

7 Integroimismenetelmiä

Perusongelma: Derivointi on helppoa, siihen on kaavat, joilla kaikki funktio voidaan derivoida. Integrointi on usein vaikeaa: vaikka kaikilla jatkuvilla funktioilla on integraalifunktio, on sen määrittäminen usein käytännössä hankalaa tai jopa mahdotonta (alkeisfunktioiden avulla).

7.1 Osittaisintegrointi

- Osittaisintegrointi:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \mathop{/}_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

  tai ilman rajoja

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

7.2 Sijoitusmenetelmä

- Sijoitusmenetelmä:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

  Käytännössä: Sijoitus $u = g(x)$, jolloin

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

  Rajojen muutos: $x = a \Rightarrow u = g(a)$, $x = b \Rightarrow u = g(b)$

- Muunnos voidaan kirjoittaa myös käänteisfunktion avulla:

$$x = g^{-1}(u) \Rightarrow dx = (g^{-1})'(u)\,du = (1/g'(x))\,du,$$

  joten tulos on sama kuin aikaisemmin. (Adamsin kirjassa nämä käsitellään erikseen kohdissa 5.6 ja 6.3, mikä on tavallaan turhaa)

7.3 Osamurtohajotelma*

- Osamurtohajotelma: Rationaalifunktiot voidaan integroida hajottamalla ne yksinkertaisempiin osiin. Tyypillinen esimerkki: $a, b \in \mathbf{R}$ vakioita,

$$\frac{ax+b}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

jossa kertoimet $A,\ B$ saadaan selville kertomalla puolittain lausekkeella $(x-1)(x-2)$ ja sijoittamalla vuorotellen $x = 1$ tai $x = 2$.
Toinen tapa: verrataan x-termien kertoimia yhtälön eri puolilla. Tämän avulla voidaan laskea

$$\int \frac{ax+b}{(x-1)(x-2)}\,dx = A\ln|x-1| + B\ln|x-2| + C$$

7.4 Numeerinen integrointi*

- Numeerinen integrointi: Yksinkertaisin tapa on puolisuunnikas- eli trapetsisääntö:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right),$$

  jossa $h = (b-a)/n$ on askelpituus, $n \in \mathbf{N}$ jakovälien lukumäärä ja $x_k = a + kh$, $0 \le k \le n$, ovat jakopisteet.

- Muita approksimaatioita ovat mm. keskipistesääntö

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = h(f(m_1)+f(m_2)+\cdots+f(m_n)),\ m_k = (x_{k-1}+x_k)/2,$$

  ja Simpsonin sääntö

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)),$$

  jossa funktiota interpoloidaan 2. asteen polynomilla kahdella peräkkäisellä jakovälillä; luvun n täytyy olla parillinen.

8 Toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö

- Toisen kertaluvun lineaarinen ja vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y'' + py' + qy = r(x),$$

  jossa p, q ovat vakioita ja $r(x)$ on (ainakin paloittain) jatkuva funktio. Differentiaaliyhtälö on *homogeeninen*, jos $r(x) = 0$ kaikilla x; muussa tapauksessa se on *epähomogeeninen*.

- Yhtälön ratkaisumenetelmä on esitetty erillisessä monisteessa.

9 Lukujonot

9.1 Induktioperiaate*

- Todistettavana jokin ominaisuus (esim. kaava) P_n, jonka väitetään olevan voimassa kaikilla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Induktiotodistus tekee tämän kahdessa vaiheessa:

  - Osoitetaan, että P_0 on tosi. Tämä on yleensä helppoa.
  - Lähdetään oletuksesta, että P_k on tosi jollakin k, ja päätellään sen avulla, että myös P_{k+1} on tosi.

  Näistä seuraa, että P_n on tosi kaikilla n.

- Induktiotodistus voi alkaa myös arvosta $n = 1$ tms.

- Binomikaava: Jos $a, b \in \mathbf{R}$ ja $n \in \mathbf{N}_0$, niin

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

  Tässä esiintyy **binomikerroin** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Kaavan todistus perustuu induktioon ja siinä tarvitaan binomikerrointen ominaisuutta

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

  jonka perusteella binomikertoimet saadaan ns. **Pascalin kolmiosta**.

9.2 Lukujonot

- Lukujonolla tarkoitetaan ääretöntä jonoa reaalilukuja $a_n \in \mathbf{R}$, kun indeksi $n \in \mathbf{N}$. Merkitään

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

- Lukujono täsmällinen tulkinta on funktio $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, jolle $f(n) = a_n$. Tämä selventää esimerkiksi lausekkeiden $a_{n+1} = f(n+1)$ ja $a_{n-1} = f(n-1)$ tulkintoja (indeksin siirrot).

- Jonon indeksöinti voi alkaa myös jostakin muusta arvosta kuin 1. Jos indeksin alkuarvo ei ole tärkeä tai tilanne on muuten selvä, voidaan käyttää merkintää (a_n).

- Lukujonoja voidaan määritellä

  - antamalla yleisen termin lauseke: esim.
    $a_n = 2^n$, kun $n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ lukujono $(2, 4, 8, 16, \dots)$

  - rekursiivisesti palautuskaavojen avulla:
    $f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, kun $n \geq 2$
    $\Rightarrow$ Fibonaccin lukujono $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$
  - tekemällä mittauksia jostakin systeemistä, esim. äänen voimakkuus tasaisin aikavälein (idealisoituna äärettömäksi jonoksi).

- Ongelmia:

  - Miten palautuskaavasta saadaan yleisen termin lauseke?
  - Mitä jonon ominaisuuksia saadaan selville yleisen termin tai palautuskaavojen avulla?

- Jonojen ominaisuuksia: Lukujono (a_n) on

  - **ylhäältä rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että $a_n \leq C$ kaikilla n
  - **alhaalta rajoitettu**, jos on olemassa sellainen $c \in \mathbf{R}$, että $a_n \geq c$ kaikilla n
  - **rajoitettu**, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu
  - **nouseva**, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla n
  - **laskeva**, jos $a_{n+1} \leq a_n$ kaikilla n
  - **monotoninen**, jos se on nouseva tai laskeva
  - **jaksollinen**, jos on olemassa sellainen $k \in \mathbf{N}$, että $a_{n+k} = a_n$ kaikilla n.

9.3 Lukujonon suppeneminen

- Lukujono (a_n) **suppenee** kohti raja-arvoa L, jos lausekkeen $|a_n - L|$ arvo lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$; täsmällisemmin: jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen indeksi $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että $|a_n - L| \leq \varepsilon$ aina kun $n \geq n_\varepsilon$.

  Tällöin merkitään $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

- Jos lukujono ei suppenee, niin se **hajaantuu**.

- Suppenevien jonojen ominaisuuksia:

  - suppeneva jono on rajoitettu
  - jos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, niin
    * $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
    * $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$,
    * $\lim\limits_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\, a$,
    * $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, jos $b \neq 0$ (jolloin myös $b_n \neq 0$ jostakin indeksistä alkaen).

- Esimerkkejä:
  - Geometrinen jono (q^n) suppenee, jos suhdeluku $-1 < q \leq 1$, jolloin sen raja-arvo on joko 0 tai 1. Muissa tapauksissa geometrinen jono hajaantuu.
  - Jonon suppenemista kohti nollaa voi tutkia lausekkeen $|a_{n+1}/a_n|$ avulla: jos jostakin indeksistä alkaen on $|a_{n+1}/a_n| \leq q$, jossa $0 \leq q < 1$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
  - Suppiloperiaate: Jos $a_n \leq b_n \leq c_n$ jostakin indeksistä alkaen ja
  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n,$$
  niin jono (b_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.
  - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, kun $a > 0$
  - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  - $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e =$ Neperin luku $\approx 2{,}7182818\ldots$ Tähän palataan myöhemmin.

- Seuraavista ominaisuuksista ensimmäinen on **aksioma**, ominaisuus jota ei todisteta, vaan se otetaan päättelyn lähtökohdaksi. Jälkimmäinen ominaisuus seuraa ensimmäisestä tarkastelemalla samaa jonoa vastakkaisella etumerkillä.
  - Nouseva ja ylhäältä rajoitettu jono suppenee.
  - Laskeva ja alhaalta rajoitettu jono suppenee.

- Reaaliluvulla tarkoitetaan desimaalilukua $n{,}d_1d_2\ldots$, jossa kokonaisosa n on kokonaisluku ja desimaalit $d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Edellisestä kohdasta seuraa, että tällainen luku on järkevä käsite monotonisen rationaalilukujonon raja-arvoksi tulkittuna.

- Kaarenpituus yksikköympyrällä $x^2 + y^2 = 1$ määritellään seuraavalla tavalla: jaetaan tutkittava kaari tasavälisesti 2^n:ään osaan ja lasketaan vastaavan murtoviivan pituus a_n. Näin saadaan nouseva ja ylhäältä rajoitettu jono, jonka raja-arvo on kyseessä olevan kaaren pituus.

- Määritelmä: Luku π on yksikköympyrän puolikkaan kaarenpituus.

- Kaarenpituuden avulla määritellään kulman yksikkö radiaani (lyh. rad), joka on dimensioton. Trigonometriset funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ määritellään yksikköympyrän kaarenpituuden avulla kaikille $x \in \mathbf{R}$.

- Myös käsitteet $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ voidaan määritellä tasmällisesti. Esimerkiksi
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \begin{array}{l}\text{jokaista lukua } M \text{ vastaa sellainen indeksi } n_M,\\ \text{että } a_n \geq M \text{ aina kun } n \geq n_M.\end{array}$$
Tällöin sanotaan, että jono hajaantuu kohti ääretöntä (tai vast. $-$ääretöntä).

9.4 Jatkuvuus ja jonot

- Funktion jatkuvuus voidaan määritellä myös jonojen avulla. Seuraava määritelmä on yhtäpitävä kurssin alussa esitetyn $\varepsilon - \delta$-määritelmän kanssa.

- Jos $f\colon A \to B$ ja $a \in A$, niin funktio f on **jatkuva pisteessä** a, kun pätee:
  Jos jonolle (a_n) on voimassa $a_n \in A$ kaikilla n ja $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, niin silloin $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

- Lyhyesti kirjoitettuna jatkuvuus tarkoittaa yhtälöä

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n).$$

10 Sarjat

10.1 Sarjan suppeneminen

Tässä luvussa tutkimme kysymystä, kuinka voidaan laskea yhteen ääretön määrä lukuja. Koska tätä ei voida käytännössä tehdä "yhdellä kertaa", niin ongelmaa lähestytään raja-arvon kautta.

- Lukujonosta $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ voidaan muodostaa sen **osasummien jono** (s_n):

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

- Jos osasummien jonolla (s_n) on raja-arvo $s \in \mathbf{R}$, niin sanotaan, että jonosta (a_k) muodostettu **sarja suppenee** ja sen summa on s. Tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

  Jos sarja ei suppene, niin se **hajaantuu**.

- Huomautuksia:
  - Osasummat indeksöidään samalla tavalla kuin jono (a_k); esim. jonon $(a_k)_{k=3}^{\infty}$ osasummat ovat $s_3 = a_3, s_4 = a_3 + a_4$ jne.
  - Suppenevaan sarjaan voidaan tehdä summausindeksin siirtoja: esim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}.$$

- Geometrinen sarja $\displaystyle\sum_{k=i}^{\infty} aq^k$ suppenee, jos $|q| < 1$ (tai $a = 0$), jolloin sen summa on $\dfrac{aq^i}{1-q}$. Jos $|q| \geq 1$, niin sarja hajaantuu.

- Suppenevien sarjojen ominaisuuksia:

  - $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
  - $\sum_{k=1}^{\infty}(c\,a_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, jos $c \in \mathbf{R}$
  - jos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, niin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$;
    ts. jos $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hajaantuu.

Esimerkki. Harmoninen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

hajaantuu, vaikka sarjan yleisen termin raja-arvo on nolla.

10.2 Positiiviset sarjat

- Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ on **positiivinen** (tai positiiviterminen), jos $p_k \geq 0$ kaikilla k.

- Positiivisille sarjoille suppenemisen tutkiminen on suoraviivaista: Positiivinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun sen osasummien jono on ylhäältä rajoitettu.
  Syy: Positiivisen sarjan osasummien jono on nouseva.

- Esimerkiksi sarja

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

  suppenee, koska $s_n < 2$ kaikilla n (luennot).

- Sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee **itseisesti**, jos vastaava positiivinen sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee.
  Pätee: sarjan itseisestä suppenemisesta seuraa (tavallinen) suppeneminen, ja tällöin

  $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

10.3 Suppenemistestejä

- Yleistyksenä saadaan ns. majorantti- ja minoranttiperiaatteet:

  - Jos $|a_k| \leq p_k$ ja $\sum p_k$ suppenee, niin myös $\sum a_k$ suppenee.
  - Jos $0 \leq p_k \leq a_k$ ja $\sum p_k$ hajaantuu, niin myös $\sum a_k$ hajaantuu.

- Käytännössä tärkein tapa suppenemisen tutkimiseen perustuu ns. **suhdetestiin**, jossa sarjan termejä verrataan sopivaan geometriseen sarjaan:

- Jos jostakin indeksistä alkaen on voimassa

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq Q < 1,$$

niin sarja $\sum a_k$ suppenee (ja "suppenemisnopeus" vastaa geometrista sarjaa $\sum Q^k$ tai on vieläkin suurempi).

- Edellisen kohdan käytännöllisempi versio on:
Jos on olemassa raja-arvo $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q$, niin
sarja $\sum a_k$ $\begin{cases} \text{suppenee,} & \text{jos } 0 \leq q < 1, \\ \text{hajaantuu,} & \text{jos } q > 1, \\ \text{voi olla suppeneva tai hajaantuva,} & \text{jos } q = 1. \end{cases}$
Viimeisessä kohdassa ei siis saada mitään tietoa suppenemisesta.

10.4 Vuorottelevat sarjat*

- Jos $p_k > 0$ kaikilla k, niin muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}p_k \quad \text{tai} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k p_k$$

oleva sarja on **vuorotteleva**.

- Suhdetestin lisäksi vuorottelevan sarjan suppenemista voidaan tutkia Leibnizin lauseen avulla:

  - Jos vuorottelevassa sarjassa $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}p_k$ pätee
(i) $p_{k+1} < p_k$, ja
(ii) $\lim p_k = 0$,
niin sarja suppenee. Jos lisäksi sarja katkaistaan kohdasta n, niin vastaavalle jäännöstermille

$$r_{n+1} = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}p_k$$

on voimassa $|r_{n+1}| < p_{n+1}$.

- Leibnizin lauseen perusteella esim. sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ suppenee, vaikka aikaisemman perusteella se ei suppene itseisesti.

10.5 Potenssisarjat

- Tämän jälkeen onkin hyvä käydä uudelleen läpi potenssisarjoja koskevat asiat kohdasta 3.2.