

MS-A010{2, 3,4,5} (ELEC\*, ENG\*)  
Differentiaali- ja integraalilaskenta 1  
Luento 6: Alkeisfunktioista

Pekka Alestalo, Jarmo Malinen

Aalto-yliopisto, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

August 26, 2020

# Funktio I

Kertauksena ja muistutuksena:

- Funktio  $f: A \rightarrow B$  on relaatio, joka liittää jokaiseen joukon  $A$  alkioon  $a$  **täsmälleen yhden**  $B$ :n alkion  $b$ . Merkitään  $b = f(a)$ .
- Tässä  $A = M_f$  on  $f$ :n **määrittelyjoukko** ja  $B$  on  $f$ :n **maalijoukko**.
- Funktion  $f$  **arvojoukko** (eli kuvajoukko) on  $B$ :n osajoukko  $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ .
- Jos funktion määrittelyjoukko  $A \subset \mathbb{R}$ , niin kyseessä on yhden muuttujan funktio.

Esimerkkejä:

- Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , maalijoukko on  $\mathbb{R}$ , mutta sen arvojoukko on  $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$ .
- Edellisen esimerkin funktio voidaan toki määritellä suoraan muodossa  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ ,  $f(x) = x^2$ , jolloin arvojoukko on sama kuin maalijoukko.
- Maalijoukko ja arvojoukko voidaan periaatteessa määritellä samaksi kaikkien funktioiden kohdalla, mutta se ei yleensä olet tarpeellista tai varsinkaan käytännöllistä.

Yritä löytää esimerkiksi funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^6 + x^2 + x$  arvojoukko.

# Käänteisfunktio I

Funktio  $f: A \rightarrow B$  on

- **injektio**, jos eri pisteissä saadaan eri arvot, ts.  
 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ , ts.  
 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .
- **surjektio**, jos arvojoukko on sama kuin maalijoukko, ts.  $f(A) = B$ .
- **bijektio**, jos se on sekä injektio että surjektio.

Kysymys on siis yhtälön  $y = f(x)$  ratkaisujen  $x$  lukumäärästä. Jos jokaiselle  $y \in B$  on olemassa

- korkeintaan yksi ratkaisu  $x \in A$ , niin  $f$  on injektio;
- vähintään yksi ratkaisu  $x \in A$ , niin  $f$  on surjektio;
- täsmälleen yksi ratkaisu  $x \in A$ , niin  $f$  on bijektio.

**Huom:** Funktiosta voidaan tehdä aina surjektio, jos sen maalijoukko kutistetaan arvojoukoksi jättämällä pois ylimääräiset pisteet.

## Käänteisfunktio II

Jos  $f: A \rightarrow B$  on bijektio, niin sillä on **käänteisfunktio**  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , joka määritelty ehdolla

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

- Käänteisfunktiolle pätee  $f^{-1}(f(a)) = a$  kaikilla  $a \in A$  ja  $f(f^{-1}(b)) = b$  kaikilla  $b \in B$ .
- Yhdistetyn kuvauksen notaatiolla  $f^{-1} \circ f = Id_A$  ja  $f \circ f^{-1} = Id_B$ , jossa  $Id_A(x) = x$  kaikilla  $x \in A$ , ja jossa  $Id_B(x) = x$  kaikilla  $x \in B$ .
- Huomaa, että  $f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ .
- Jos  $A \subset \mathbb{R}$  ja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  on aidosti monotoninen, niin surjektioilla  $f: A \rightarrow f(A)$  on käänteisfunktio.

# Käänteisfunktio III

Käänteisfunktion kuvaaja on alkuperäisen kuvaajan peilikuva suoran  $y = x$  suhteen.

**Perustelu:** Piste  $(a, b)$  on funktion  $f$  kuvaajalla  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} b = f(a) &\Leftrightarrow a = f^{-1}(b) \\ \Leftrightarrow \text{piste } (b, a) &\text{ on funktion } f^{-1} \text{ kuvaajalla.} \end{aligned}$$

Lisäksi koordinaattien vaihto-operaation  $(a, b) \mapsto (b, a)$  geometrinen tulkinta on peilaus suoran  $y = x$  suhteen.

Voidaan ymmärtää piirtoheitinkalvon tai voipaperin avulla, katsomalla funktion kuvaajaa “nurjalta puolelta”.

**Intuitiivinen seuraus:** Jos  $f: A \rightarrow f(A)$  jossa  $A$  on väli ja  $f$  on jatkuva, niin myös  $f^{-1}$  on jatkuva joukossa  $f[A]$ .

# Käänteisfunktio IV

Funktion  $f: ]a, b[ \rightarrow ]c, d[$  derivoituvuus heijastuu käänteisfunktioon  $f^{-1}$ .

**Idea:** Funktion  $f$  (tai  $f^{-1}$ ) derivoituvuus tarkoittaa sen kuvaajalla ei-pystysuoran tangentin olemassaoloa kussakin määrittelyjoukon pisteessä.

**Johtopäätös:** Jos  $f$  on derivoituva,  $f^{-1}$  on olemassa, ja  $f'(x) \neq 0$  kaikilla  $x \in ]a, b[$ , niin silloin  $f^{-1}$  on derivoituva.

Nähdään todeksi katsomalla funktion  $f$  kuvaajaa ja sen erästä tangenttia piirtoheitinkalvon "nurjalta puolelta", jolloin se muuttuu  $f^{-1}$ :n kuvaajaksi ja vastaavaksi tangentiksi.

**Derivointikaava:** Jos  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ , niin

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

missä  $f'(f^{-1}(x)) =$  funktion  $f$  derivaatta laskettuna pisteessä  $f^{-1}(x)$ .

Mistä tämä kaava tulee?

# Trigonometriset funktiot I

- Kulman yksikkö radiaani = rad: kulmaa vastaavan yksikköympyrän osan kaarenpituus.
- $\pi$  rad = 180 astetta, ts.  $1 \text{ rad} = 180/\pi \approx 57,3$  astetta
- Funktiot  $\sin x$ ,  $\cos x$  määritellään yksikköympyrän avulla niin, että  $(\cos x, \sin x)$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , on yksikköympyrän parametrisointi kaarenpituuden  $x$  avulla.

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \neq \pi/2 + n\pi), \\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq n\pi)\end{aligned}$$

- Jaksollisuus:

$$\begin{aligned}\sin(x + 2\pi) &= \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x, \\ \tan(x + \pi) &= \tan x. \quad \text{Nota bene!}\end{aligned}$$



# Trigonometriset funktiot II

- Alkeellisia ominaisuuksia (perustelut yksikköympyrästä):

- $\sin 0 = 0$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$  ja  $\cos 0 = 1$ ,  $\cos(\pi/2) = 0$
- $\sin$  ja  $\tan$  ovat parittomia funktioita,  $\cos$  on parillinen:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$

- Yhteenlaskukaavat (perustelu kompleksiluvuilla tai matriiseilla):

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

- Derivaatat (johdettu aiemmin luennolla):

$$D(\sin x) = \cos x, \quad D(\cos x) = -\sin x$$

- Trigonometrisilla funktioilla on käänteisfunktio, jos funktioiden määrittely- ja maalijoukkoja rajoitetaan sopivalla tavalla.
- Sini-funktio

$$\sin: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

on aidosti kasvava bijektio.

- Kosini-funktio

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

on aidosti vähenevä bijektio.

- Tangentti-funktio

$$\tan: ] - \pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$$

on aidosti kasvava bijektio.

- Käänteisfunktiot:

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\pi/2, \pi/2[,$$

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2],$$

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

- Siis:

$$x = \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arctan x, \text{ kun } \alpha \in ]-\pi/2, \pi/2[$$

$$x = \sin \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arcsin x, \text{ kun } \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$x = \cos \alpha \Leftrightarrow \alpha = \arccos x, \text{ kun } \alpha \in [0, \pi]$$

- Huom: arc\*\*\* annetaan **radiaaneissa**, ellei...

- Käänteisfunktioiden derivaatat

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$D \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

**Perustelu:** Derivoimalla puolittain yhtälö  $\tan(\arctan x) = x$ , kun  $x \in \mathbb{R}$  saadaan

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot D(\arctan x) &= Dx = 1 \\ \Rightarrow D(\arctan x) &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \end{aligned}$$

jossa  $\tan^2(\arctan x) = (\tan(\arctan x))^2 = x^2$ .

# Eksponenttifunktio I

- Neperin luku

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \\ &\approx 2,718281828459 \dots \end{aligned}$$

- Eksponenttifunktio  $\exp$  Taylor-sarjansa avulla:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys?

# Eksponenttifunktio II

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys pääpiirteissään:

- Määritellään  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sarjakehitelmällä

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sarja suppenee suhdetestin perusteella kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ , ja  $\exp(0) = 1$ .

- **Osoitetaan:**  $\exp$  on derivoituva ja toteuttaa differentiaaliyhtälön  $\exp'(x) = \exp(x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . (Sarjan derivoiminen termeittäin on koko päättelyn **matemaattisesti** hankalin kohta, vaikka intuitiivisesti helppo ymmärtää.)
- Differentiaaliyhtälönsä perusteella toteuttaa myös

$$\exp(-x) = 1/\exp(x) \text{ ja } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ ... (jälkimmäinen taululla jos aikaa!)

# Eksponenttifunktio III

- ...josta seuraa, että  $\exp(p/q) = (\exp(1))^{p/q}$  kaikille rationaaliluvuille  $p/q \in \mathbb{Q}$ ...
- ... mistä jatkuvuuden (koska derivoituva) perusteella

$$\exp(x) = (\exp(1))^x$$

kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .

- Koska binomikaavalla saadaan helpompi punainen yhtäsuuruusmerkki kaavaan

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

niin eksponenttifunktiolle tulee lopulta muotoon  $\exp(x) = e^x$ .

Jatkossa väliaikainen notaatio  $\exp(x)$  voidaan unohtaa kokonaan.

# Eksponttifunktio IV

Punaisen yhtäsuuruusmerkin metsästys johti seuraaviin tuttuihin laskulakeihin:

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $D(e^x) = e^x$
- $e^{-x} = 1/e^x$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $e^x e^y = e^{x+y}$

kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Lisäksi  $f(x) = e^x$  on aidosti kasvava, ei-negatiivinen surjektio  $f: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$ , joten sillä on käänteisfunktio  $f^{-1}: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .



- **Logaritmifunktio** = eksponenttifunktion käänteisfunktio:

$$\ln: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

- Tarkasti ottaen kyseessä on  $e$ -kantainen eli **luonnollinen** logaritmi. Yleisen  $a$ -kantaisen logaritmin määritelmä perustuu kaavaan

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

kun  $a > 0$  ja  $y > 0$ .

- Muita sovelluksissa esiintyviä logaritmeja ovat Briggsin 10-kantainen logaritmi  $\lg x = \log_{10} x$  ja binäärilogaritmi  $\lg x = \log_2 x$ .
- Merkinnällä  $\log x$  tarkoitetaan (nykyään) yleensä (esim. tietokoneohjelmissa) luonnollista logaritmia  $\ln x$ .

## Logaritmin ominaisuuksia

- $e^{\ln x} = x$ , kun  $x > 0$
- $\ln(e^x) = x$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$
- $\ln 1 = 0$ ,  $\ln e = 1$
- $\ln(a^b) = b \ln a$ , kun  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ , kun  $a, b > 0$
- $D \ln |x| = 1/x$ , kun  $x \neq 0$

Nämä seuraavat vastaavista eksponenttifunktion ominaisuuksista.

# Hyperboliset funktiot I

- Hyperbolinen sini *sinus hyperbolicus*  $\sinh$ , hyperbolinen kosini *cosinus hyperbolicus*  $\cosh$  ja hyperbolinen tangentti  $\tanh$ :

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[, \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

- Derivaatat:  $D \sinh x = \cosh x$ ,  $D \cosh x = \sinh x$ .
- Kaikilla trigonometrisilla kaavoilla on hyperbolinen vastine, joka seuraa yhteyksistä  $\sinh(ix) = i \sin x$ ,  $\cosh(ix) = \cos x$ , jossa  $i^2 = -1$ .

Siksi  $\sin^2$ -termien merkki vaihtuu kaavoissa, muu pysyy samana.

Esimerkiksi  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ .

# Hyperboliset funktiot II

- Hyperboliset käänteisfunctiot eli area-functiot; area ja lyhenne ar viittaa käänteisfunctioiden geometriseen tulkintaan eräänä hyperbeliin liittyvänä pinta-alana:

$$\sinh^{-1} x = \operatorname{ar} \sinh x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^{-1} x = \operatorname{ar} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

- Käänteisfunctioiden derivaatat:

$$D \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$$