Aalto University
School of Science

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka
Tentti 18.12.2018

1. Vastaa lyhyesti, mutta perustellusti seuraaviin kohtiin. (1 p./kohta)
a) Heisenbergin epämääräisyysperiaate ja miten se liittyy kommutaatiorelaatioihin?
b) Jos systeemi on alussa energian ominaistilassa $\phi(x)$, jolla on energia E, mikä on sen aikakehitys?
c) Mitä on tunneloituminen?
d) Mitä tarkoitetaan kahden kvanttimekaanisen tilan ortogonaalisuudella?
e) Osoita ei-degeneroidussa tapauksessa, että jos kaksi hermiittistä operaattoria $\hat{A}$ ja $\hat{H}$ kommutoivat keskenään, niin niillä on yhteiset (ei-triviaalit) ominaisfunktiot.
f) Mikä on Blochin aaltofunktio?

2. Tarkastellaan m-massaista hiukkasta, joka liikkuu äärettömässä yksiulotteisessa potentiaalikuopassa, jolle $V = 0$, kun $0 \leq x \leq L$, muulloin $V = \infty$. Hiukkasen Hamiltonin operaattorin $\hat{H}$ ortonormeeratut ominaisfunktiot (välillä $0 \leq x \leq L$) ja -arvot ovat

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2, \quad n = 1, 2, ... \tag{1}$$

a) Miksi Hamiltonin operaattorin (eli energian) ominaisarvot ja -tilat ovat kuten yllä? (2p.) (Vihje: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.)

b) Oletetaan, että hiukkasen tilafunktio ajanhetkellä $t = 0$ on

$$\Psi(x, 0) = C\left[\phi_1(x) + i\phi_2(x)/2\right]. \tag{2}$$

Määritä kerroin C ja ratkaise hiukkasen tila $\Psi(x, t)$ ajanhetkellä t. (2 p.)

c) Mikä on hiukkasen paikan odotusarvo $\langle \hat{x}(t = 0) \rangle$ alussa? (2 p.)

Apuna:

- $\int_0^\pi dy\, y \sin(y) \sin(2y) = -8/9$
- $\int_0^\pi dy\, y \sin^2(ny) = \pi^2/4$, missä $n = 1, 2, 3 \ldots$.

KÄÄNNÄ SIVUA

3. Tarkastellaan yksiulotteista harmonista oskillaattoria, jossa Hamiltonin operaattori on siis $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Ns. lasku- ja nosto-operaattorit määritellään

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right) \text{ ja } \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega_0}\right), \tag{3}$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_0}$.

a) Osoita, että Hamiltonin operaattori on $\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$. (3 p.)

b) Laske perustilalle $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$ ja $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2$ sekä muodosta epämääräisyyksien tulo $\Delta x \Delta p$. (3 p.)

Apuna:

- $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$
- $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$

4. a) Lähtien liikkeelle ajasta riippuvasta Schrödingerin yhtälöstä, johda operaattorin $\hat{A}$ odotusarvon aikakehitykselle lauseke

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle, \tag{4}$$

missä $\hat{H}$ on Hamiltonin operaattori. (4 p.)

b) Jos $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(x)$, laske $d\langle x\rangle/dt$? (x on paikka ja p on liikemäärä) (2 p.)

5. Hilbertin avaruuden kanta muodostuu ortonomaaleista tiloista $|\uparrow\rangle$ ja $|\downarrow\rangle$ ja systeemin Hamiltonin operaattori on (voit olettaa Ω:n reaaliseksi)

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

a) Mitkä ovat mahdolliset tulokset energian mittauksesta? (2 p.)

b) Jos systeemi on tilassa $|\psi\rangle = \frac{e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}}[|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle]$, millä todennäkäisyydellä eri energian mittaustulokset esiintyvät? (4p.)

Merkitse nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi, kurssikoodi ja kokeen päivämäärä jokaiseen suorituspaperiisi. Laskimien käyttö tentissä on kielletty.