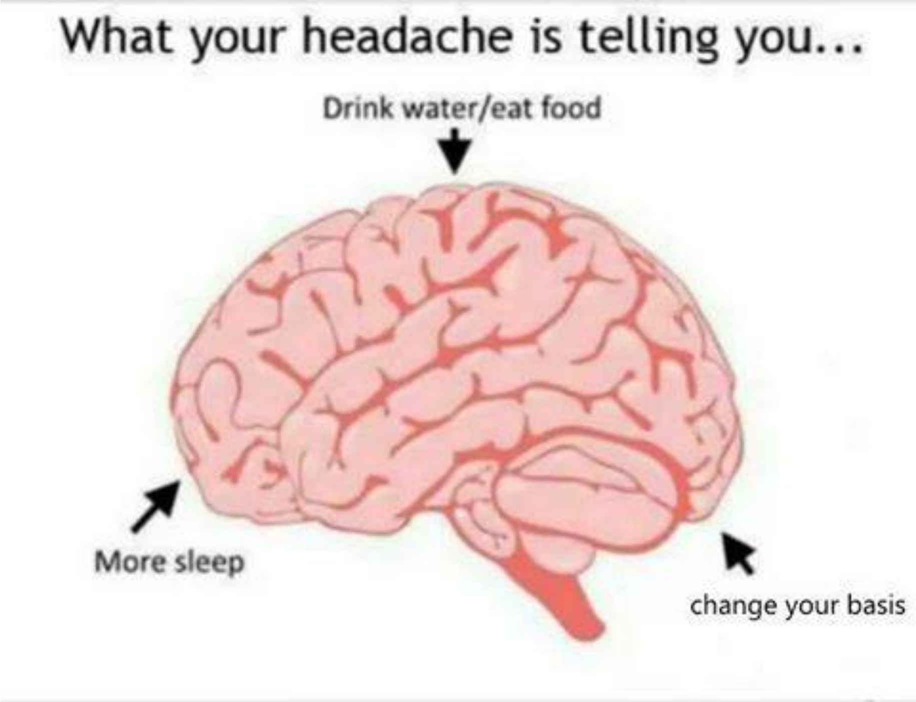
Kvanttimekaniikka: Luento 6

Martikainen Jani-Petri

Viimeksi

- Hilbertin avaruus
- Diracin merkintätapa
- Hermiittiset operaattorit
- Kommutaattorit…ei ollut aikaa



Tänään

- Kommutaattorit
- Superpositioperiaate
- Kommutoivat/Ei-kommutoivat operaattorit, epämääräisyysperiaatteet
- Mitä niillä on tekemistä toistensa kanssa?
- Degeneraatio: konsepti

Kommutaattorit

- Kommutaattorit ovat kvanttimekaniikan ytimessä ja vastuussa mm. Heisenbergin epämääräisyysperiaatteesta!
- Kaksi operaattoria $\hat{A}$ ja $\hat{B}$ …ja niiden **kommutaattori**

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

- Kertoo esim. siitä onko operaattoreiden järjestyksellä väliä
- Esimerkkejä: numeroilla operointi, kierto avaruudessa ?

Kommutaattorit

- Mikäli

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

Operaattorit **kommutoivat** ja $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$

a= numero

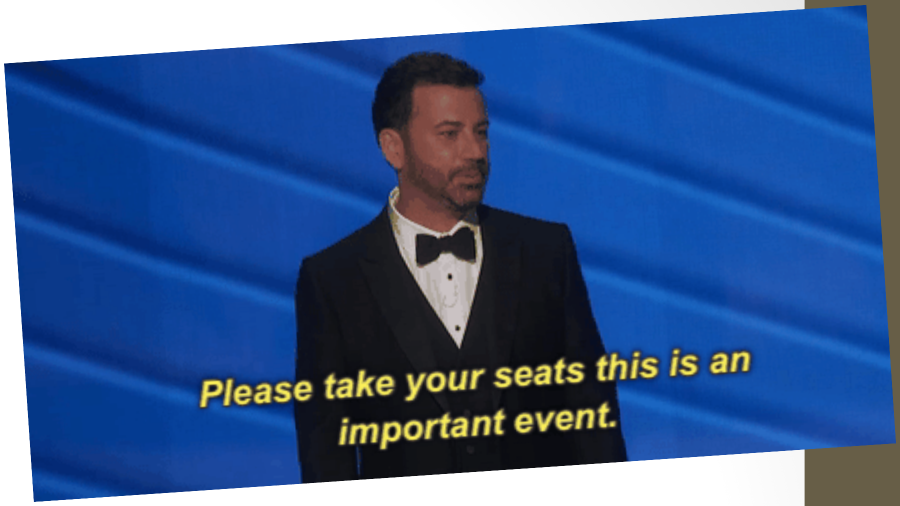
$$[\hat{A}, a] = 0$$

$$[\hat{A}, \hat{A}^2] = 0$$

- Yleisemmin:

$$[\hat{A}, f(\hat{A})] = 0$$

Kommutaattorit



- Yksi tärkeimmistä kommutaatiorelaatioista (yhdessä)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = ?$$

- Lasketaan tämä ja saadaan (x ja p komplementaarisia muuttujia)

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Kommutoivien operaattoreiden ominaistilat?

- Oleta, että operaattorit kommutoivat
- A:n ominaistilat ja –arvot

$$\hat{A}\phi_a = a\phi_a$$

- Jolloin

$$\hat{B}\hat{A}\phi_a = a\hat{B}\phi_a$$

- Koska operaattorit kommutoivat, vasen puoli…

$$\hat{A}\hat{B}\phi_a$$

- Joten $\hat{B}\phi_a$ on A:n ominaistila ominaisarvolla a
- Jos ϕ_a **on ainut** A:n tätä ominaisarvoa vastaava ominaistila…korkeintaan vakiokertoimen ero

Kommutoivien operaattoreiden ominaistilat: yhteiset!

- Toisin sanoen silloin

$$\hat{B}\phi_a = \mu\phi_a$$

- Ja **operaattoreilla samoja ominaistiloja!**
- Mitä tämä tarkoittaa mahdollisuuksille mitata observaabeleita?
- Esim**. vapaalle hiukkaselle**

$$[\hat{p}, \hat{H}] = 0$$

Molemmat voidaan mitata tarkasti!

- Tasoaallot molempien ominaistiloja
- Huomaa kuitenkin. Koska yllä H:lla on degeneraatiota, sillä voi olla ominaistiloja, jotka EIVÄT ole p:n ominaistiloja
- p:n ominaistilat ovat kuitenkin automaattisesti H:n ominaistiloja

$$\hat{H}_{free} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

Degeneraatio: konsepti

- **Operaattorilla useampi (lineaarisesti riippumaton) ominaistila joilla sama ominaisarvo.** Esim.

$$\hat{A}\phi_1 = a\phi_1$$

$$\hat{A}\phi_2 = a\phi_2$$

- Nyt mahdollisimman yleinen A:n ominaistila, jolla ominaisarvo a on (osoita…)

$$\phi_a = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$$

- Nämä funktiot virittävät 2D aliavaruuden

Degeneraatio

- Ol. B kommutoi A:n kanssa→ $\hat{B}\phi_1$ on myös A:n ominaistila
- Mutta ϕ_1 :n ei tarvitse olla B:n ominaistila! (Miksi taululla.)
- "Degeneroituneilla operaattoreilla enemmän ominaistiloja"
- Esimerkki: vapaan hiukkasen H ja p

$$\{\cos kx, \sin kx\}$$

- Ovat H:n ominaistiloja joilla energia $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

- Eivät kuitenkaan ole p:n ominaistiloja
- Voimme valita tasoaaltokannan ja ne OVAT yhteisiä ominaistiloja

Kommutaattorit ja epämääräisyysperiaatteet

- Vapaalla hiukkasella voi olla tiloja joille

$$\Delta E \Delta p = 0$$

- Mutta silti Heisenbergin epämääräisyysperiaate

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

?????

Kommutaattorit ja epämääräisyysperiaatteet

- Jos

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$$

- Niin…

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle|$$

Aina kun operaattorit eivät kommutoi, jossain on epämääräisyysperiaate!

- Miksi näin? Muistiinpanot…extra tehtävä
- **Mittauksen tuloksena saatu tila ei ole sen TOISEN operaattorin ominaistila**…ts. se on joku superpositio sen ominaistiloista
- Toisen operaattorin mittauksesssa siis epävarmuutta…
- …tee mittaus sille ja sama pätee nyt toiselle operaattorille!

Epämääräisyys/
Superpositio

Mittaus 2/romahdus

Mittaus 1/romahdus

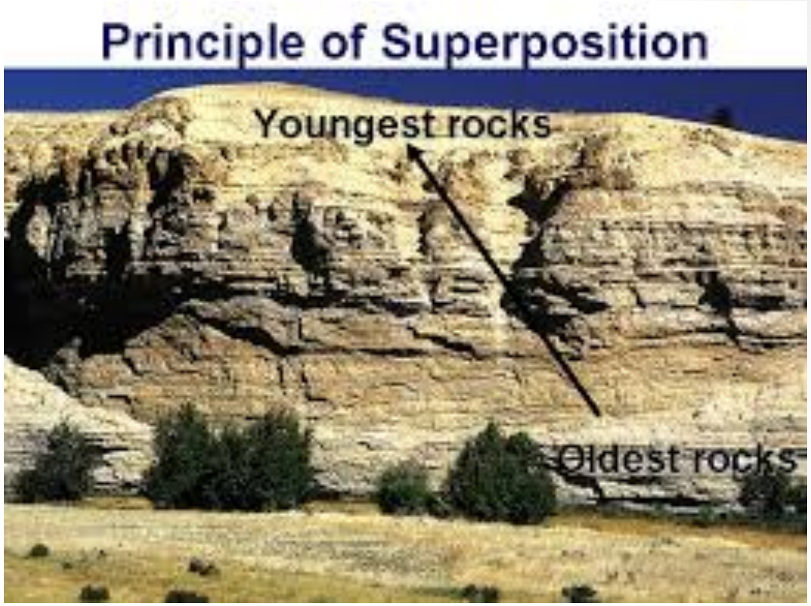
Epämääräisyys/
Superpositio
(toinen observaabeli)

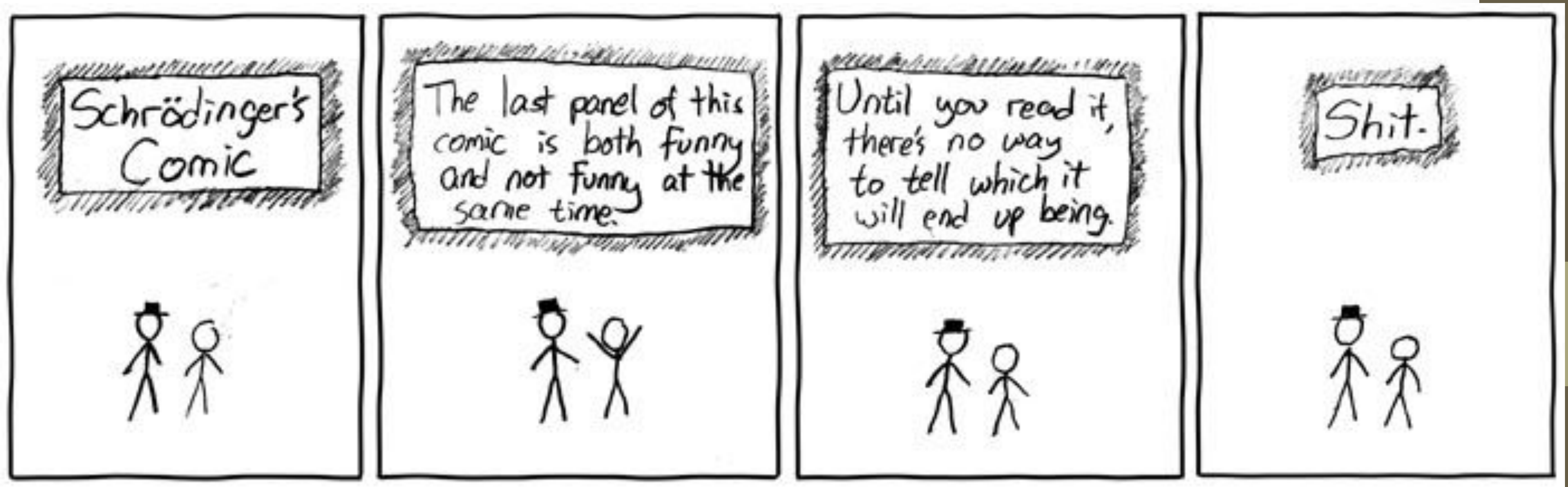
Kommutaattorit ja epämääräisyysperiaatteet

Peruskommutaattorit ja ei-kommutoivien operaattoreiden ja epämääräisyysperiaatteiden välinen yhteys pitää muistaa

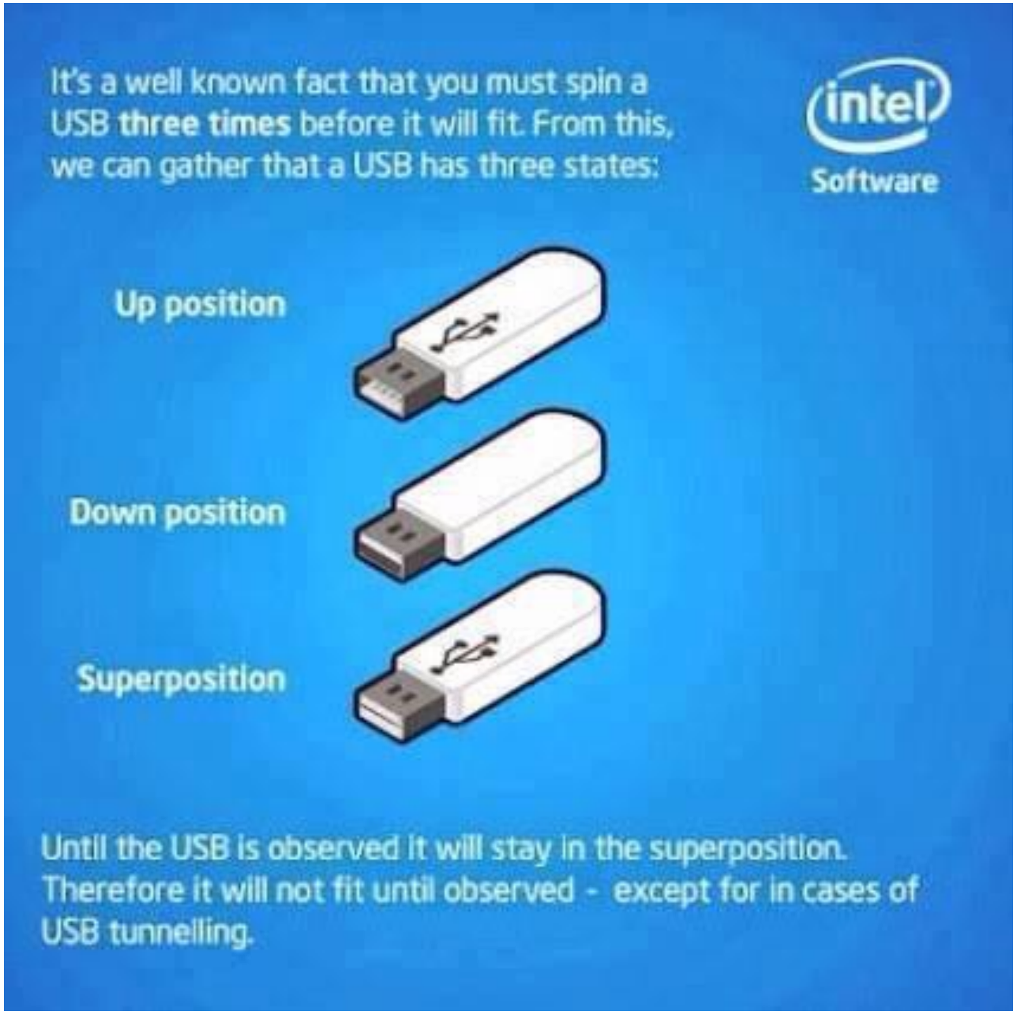
Superpositioperiaate

Myös geologiassa!





Superpositioperiaate



Superpositio

- Kuten opimme aikaisemmin*: "Observaabelin mittaus voi antaa tulokseksi vain sitä vastaavan operaattorin ominaisarvon."*
- Mutta mikä se tila oli ENNEN mittausta?
- Sen jälkeen olimme jossain ominaistilassa, mutta ennen…
- Schrödingerin yhtälö lineaarinen: jos $|\psi\rangle \,\mathrm{ja}\, |\phi\rangle$ ovat hyväksyttäviä ratkaisuja, myös

$$\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle$$

  on OK!
- Kvanttimekaaninen tila voi olla **superpositio** useasta eri mitattavan operaattorin ominaistilasta

Superpositio: toinen tapa

- Oleta, että mittaat observaabelin O
- Mittauspostulaatti kertoo, että päädyt O:n ominaistilaan
- Mutta onko tämä ominaistila vaikkapa Hamiltonin operaattorin ominaistila?
- Vastaus: yleensä ei vaan sen sijaan….

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n |\phi_n\rangle$$

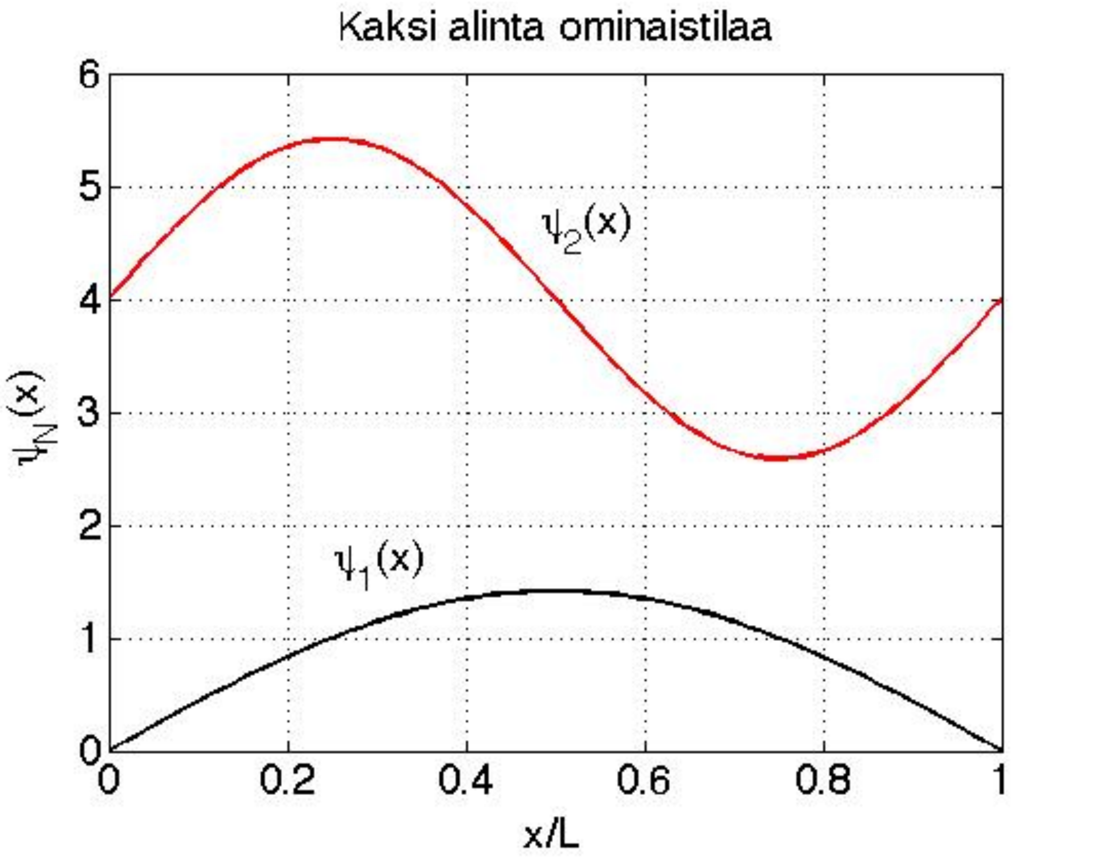
superpositio eri H:n ominaistiloista

- Tila voi muuttua superpositioksi, kun muutat Hilbertin avaruuden kantaa!

Superpositio: esimerkki

- Energian ominaistilat potentiaalikaivossa

$$E_N = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} N^2 \qquad \psi_N(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin[\frac{\pi N}{L} x]$$



Superpositio: esimerkki

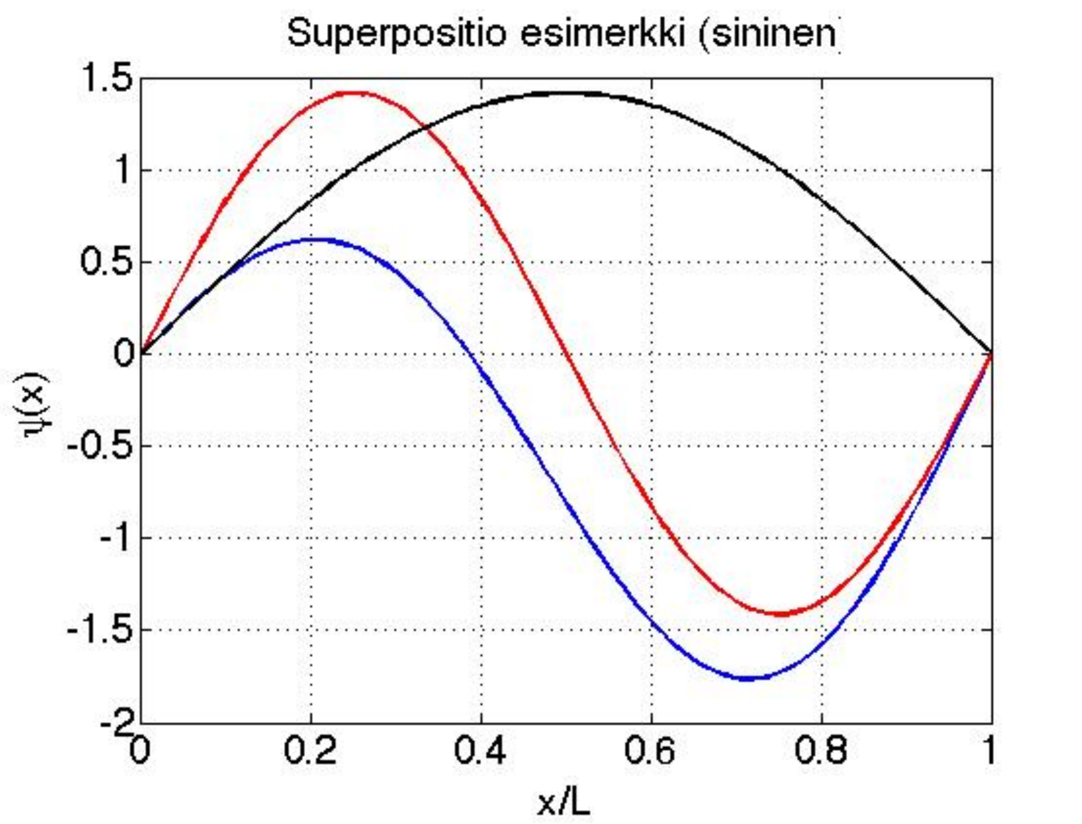
- Muodostetaan tila: $\psi(x) = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x)$
- Kuinka (kompleksi)luvut α ja β pitäisi valita?
- Aaltofunktio normalisoitu ykköseen

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1 \rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Tässä käytettiin tilojen $\psi_N(x)$ ortonormaalisuutta

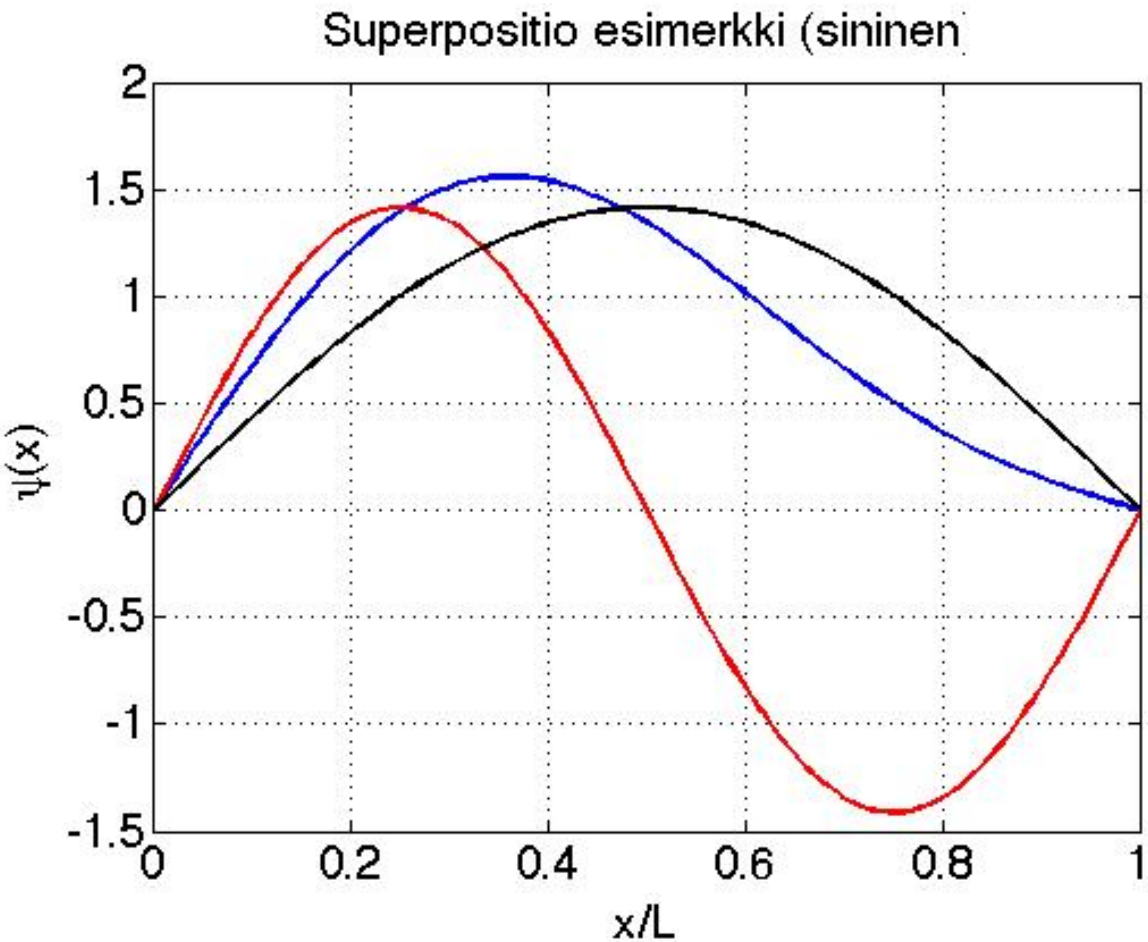
Superpositio: esimerkki

- Valitaan nyt vaikkapa $\alpha = -1/\sqrt{3}$ ja $\beta = \sqrt{2/3}$



Superpositio: esimerkki 2

- Valitaan nyt vaikkapa $\alpha = \sqrt{0.9}$ ja $\beta = \sqrt{0.1}$

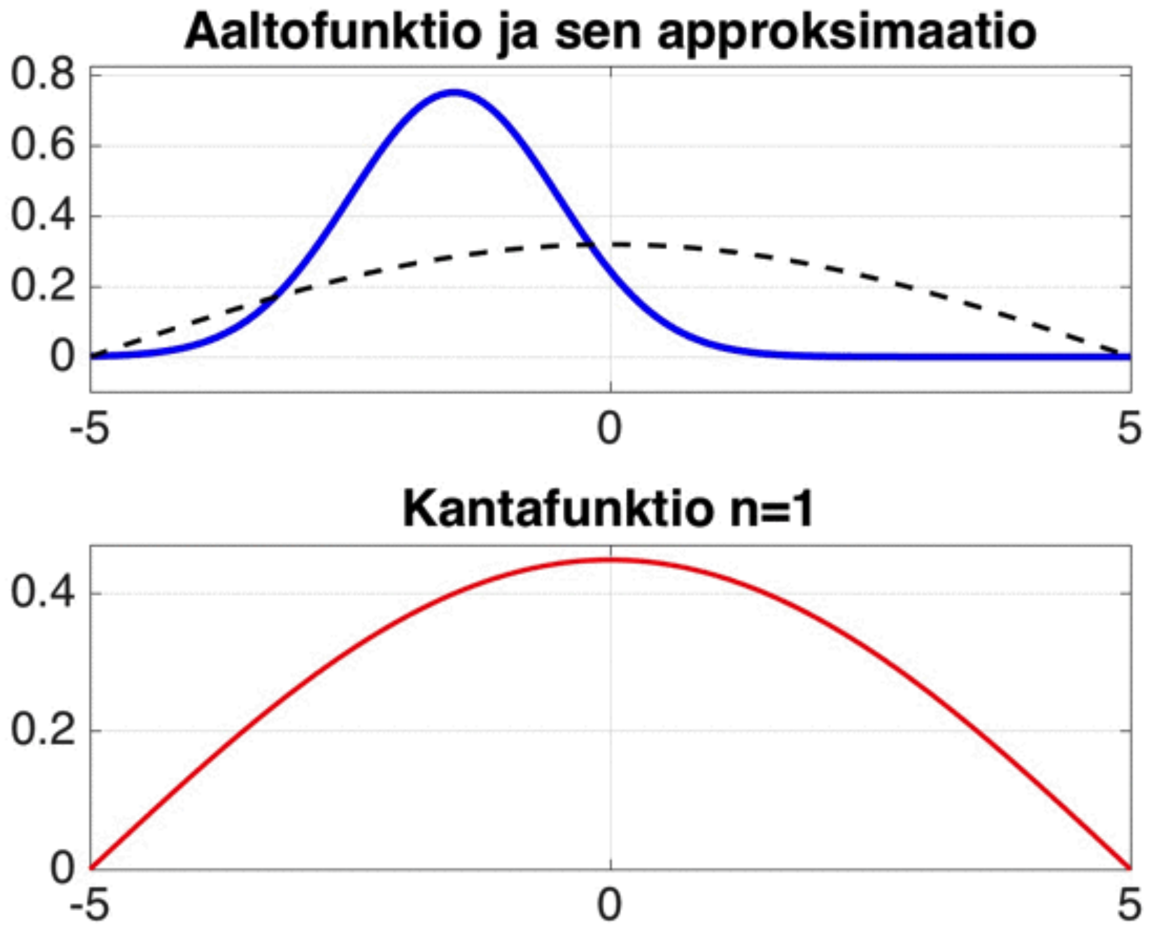


Superposition muodostaminen

- Tästä lisää muistiinpanoissa ja BriefSummary.pdf:ssä
- Idea:

$$|\psi\rangle = \sum_n \alpha_n |\phi_n\rangle \qquad \alpha_n = \langle \phi_n | \psi \rangle$$

Sarjakehitelmä: esimerkki



Resepti:superpositio+mittaus

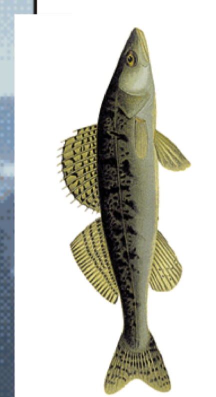
1. Jos mittaat jotain, **ratkaise ensin** observaabeliin liittyvän operaattorin ominaistilat $|\phi_n\rangle$
2. **Kehitä kvanttitila superpositiona näistä tiloista** (α_n on todennäköisyysamplitudi olla kyseisessä ominaistilassa)

$$|\psi\rangle = \sum_n \alpha_n |\phi_n\rangle \qquad \alpha_n = \langle \phi_n | \psi \rangle$$

1. Mittaus romauttaa tilan joksikin ominaistilaksi $|\phi_n\rangle$ todennäköisyydellä $P_n = |\alpha_n|^2$. Mittaustulos on tilaa $|\phi_n\rangle$ vastaava ominaisarvo

Varoituksen sana

- Huom: tähän moni on kaatunut…etenkin kohtiin 1-2
- Superpositio muodostetaan **observaabelin ominaistilojen kannassa!**



Ei oo välii…
Kuha käyttää observaabelin ominaistiloja Hilbertin avaruuden kantana.

Superpositio+mittaus

- Superpositiotilalla mittauksen **odotusarvo** ei välttämättä ole operaattorin ominaisarvo!
- Esim. energianmittaus

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_m \alpha_m^* \langle\phi_m| \left[\hat{H} \sum_n \alpha_n |\phi_n\rangle\right] = \sum_n |\alpha_n|^2 E_n$$

- Ts**. painotettu keskiarvo eri mahdollisuuksista!** (käytimme energian ominaistilojen tilojen ortonormaalisuutta)
- Esim. aikaisempi superpositio potentiaalikaivossa

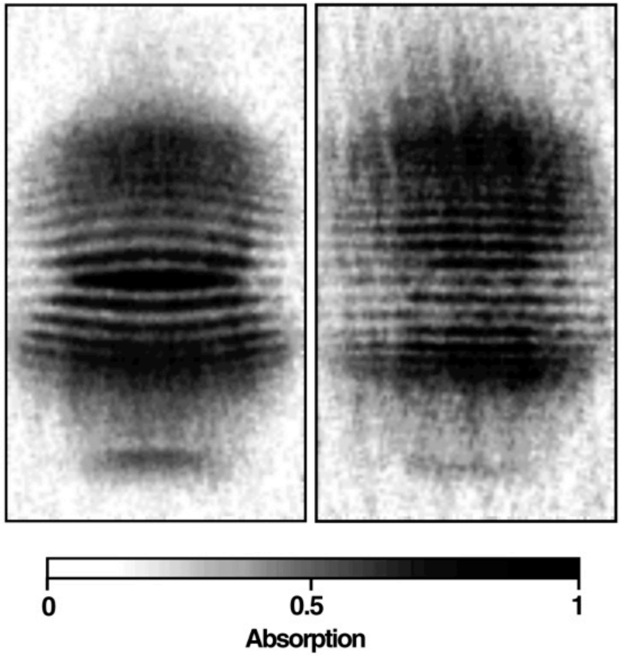
$$\alpha = -1/\sqrt{3} \text{ ja } \beta = \sqrt{2/3}$$

$$\langle\hat{H}\rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2$$

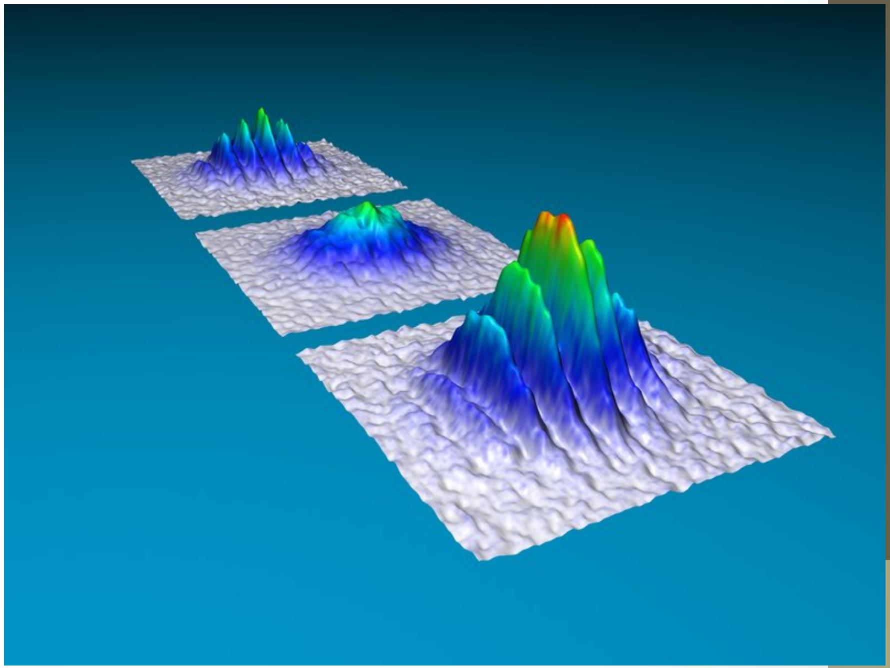
Laskareissa lisää

Superpositio: esimerkkejä

- “Laatikko”-aaltofunktio ja liikemäärän mittaus (taululla…ehkä)
- Liikemäärän mittaus potentiaalikaivon tiloissa? (taululla…ehkä)
- Aineaaltojen interferenssi…

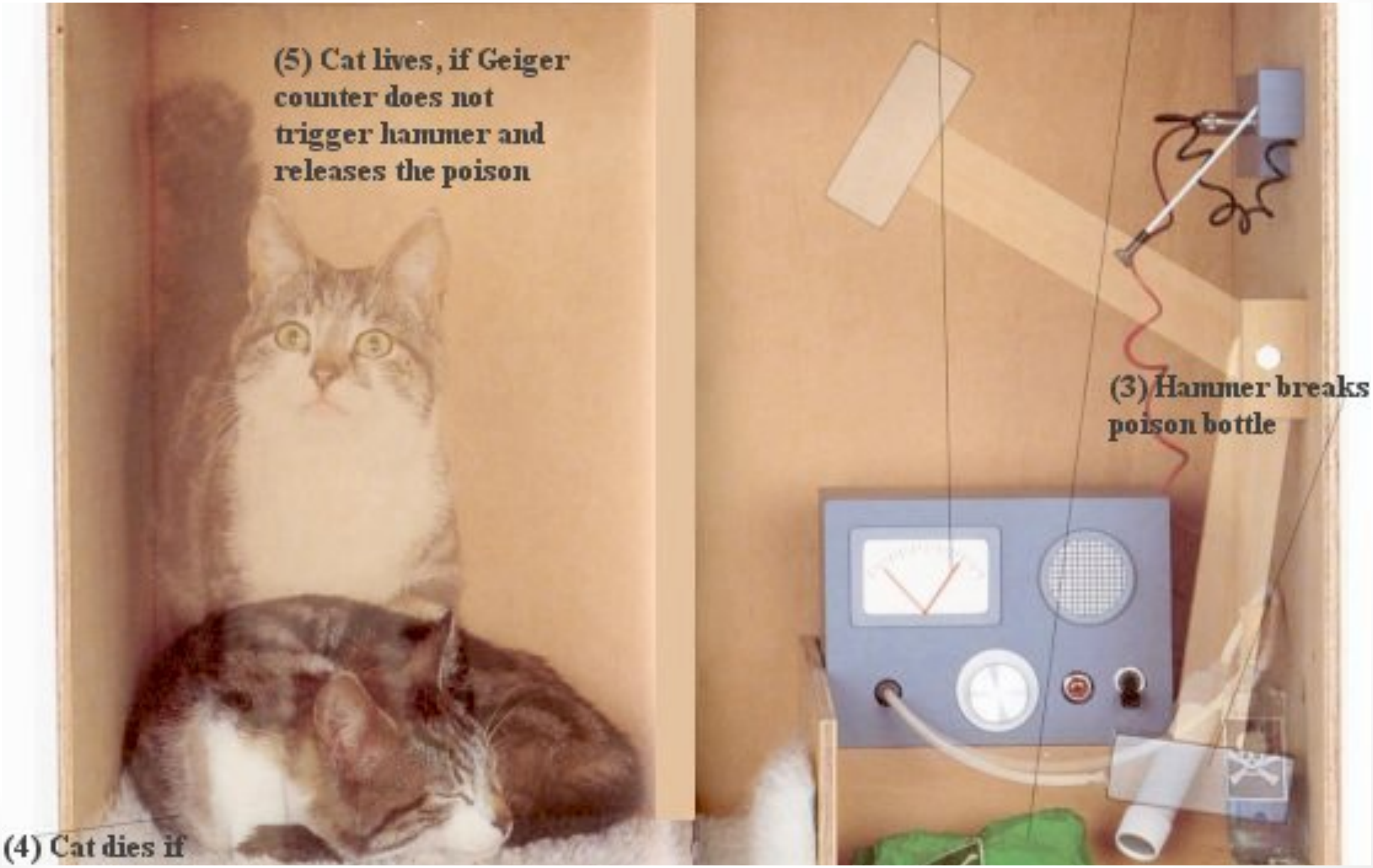


MIT



Munich

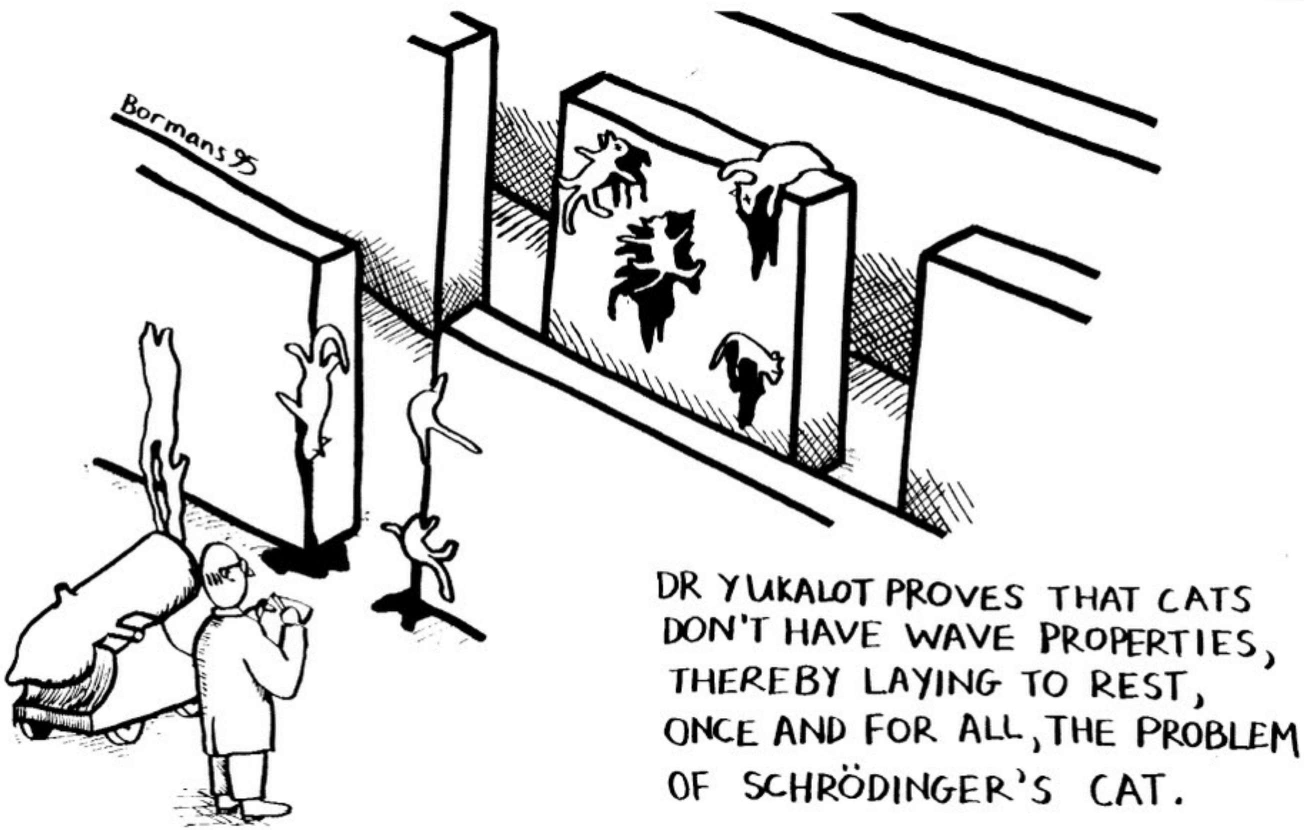
Schrödingerin kissa



Schrödingerin kissa

$$|CAT\rangle \propto |DEAD\rangle + |ALIVE\rangle$$

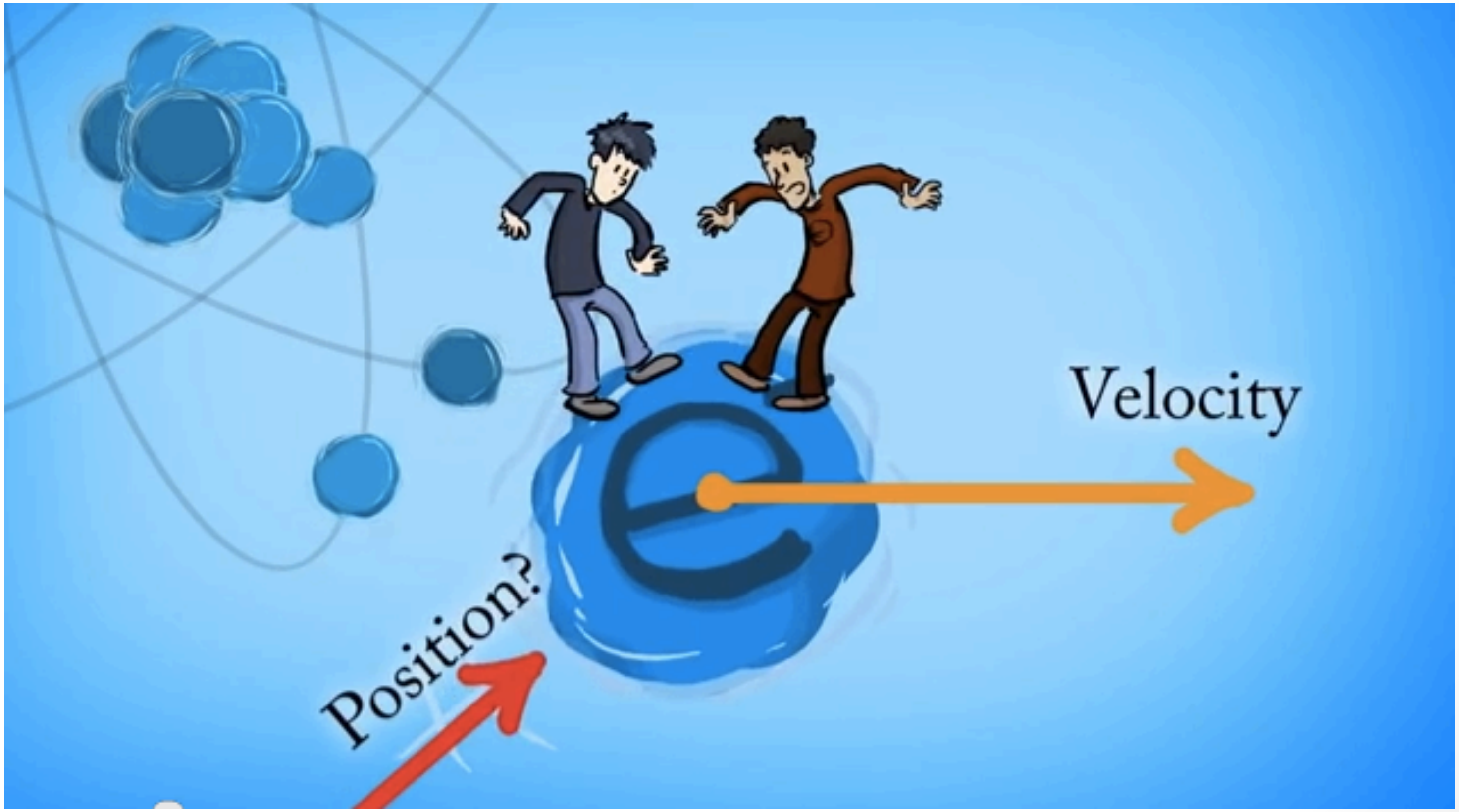
Dekoherenssi blaah blaah blaah



"Life is a process, not a state":S. Stenholm

Hyvä animaatio superpositiosta ja kvanttitiloista

[Quantum Computers Animated]



http://www.youtube.com/watch?v=T2DXrs0OpHU

Huomio!

Kvanttimekaniikassa mittauksissa
voi olla epävarmuutta VAIKKA
tila tunnetaan tarkasti!
epämääräisyys fundamentaalisempaa
kuin klassisesti.

Kysymyksiä?

- Kommutoivat/ei-kommutoivat operaattorit
- Yhteiset ominaistilat, kun kommutoivat
- Epämääräisyys, kun **eivät** kommutoi
- Superpositio
- degeneraatio

Ekstraa tämän jälkeen: tuskin aikaa luennolla

Mahdollisimman kattava kuvaus

- Esim. vapaalle hiukkaselle tilan spesifiontiin ei riitä pelkkä energian kertominen (degeneraatio)
- Kerro myös liikemäärä ja hiukkasen tila on tiedossa
- Vaikkapa kommutoivat operaattorit A,B,C…

$$\hat{A}\phi_{abc} = a\phi_{abc}$$
$$\hat{B}\phi_{abc} = b\phi_{abc}$$
$$\hat{C}\phi_{abc} = c\phi_{abc}$$

Degeneraation määrä

- Lopulta uusien asioiden mittaaminen ei enää poista degeneraatiota…ominaistila on täysin määritelty ominaisarvoista a,b,c… (ns. hyviä kvanttilukuja)
- “complete set of commuting operators”

Muistutus…

- Diracin merkintätapa
- Operaattorit, ominaistilat ja vektorit
- Case study: paikkaoperaattori

$$\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{x}'\rangle = \mathbf{x}'|\mathbf{x}'\rangle$$

operaattori Tavallinen vektori (ket) tilavektori