PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka

Laskuharjoitus 4, Vinkit

Tehtävä 1

(a) Aaltofunktion aikakehitys määritellään

$$\Psi_n(x,t) = \Psi_n(x,t=0)e^{-iE_n t/\hbar} \tag{1}$$

ja tällöin paikan odotusarvo

$$\langle x(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\, x\, |\Psi(t)\rangle \tag{2}$$

(b) Pieni typo tehtävän annossa:

$$\langle E(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\, \hat{H}\, |\Psi(t)\rangle \tag{3}$$

Tehtävä 2

Hyödyllisiä määrittelyjä:

$$\hat{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$
$$\hat{p} = \frac{m\omega}{i}\frac{\sigma}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2\ ,$$

missä $\sigma = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Ratkaise alkuun esim. $\hat{p}^2$ ja $\hat{x}^2$, muitakin tapoja on. Lisäksi apuna (osoita ensin $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$)

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \qquad => \qquad \hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

Tehtävä 3

Lähde ratkaisemaan

$$\langle x\rangle = \langle n|\, x\, |n\rangle$$
$$\langle x^2\rangle = \langle n|\, x^2\, |n\rangle\ ,$$

missä x:ään sijoitetaan vastaava luomis- ja hävitysoperaattoreiden määrittely. Tee vastaavasti liikemäärälle. Luomis- ja hävitysoperaattoreilla operoidessa

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{4}$$
$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ , \tag{5}$$

missä $\psi_n = |n\rangle$. Muista myös tilojen ortonormaalius $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$.

Tehtävä 4

Laskennallisesti kevyt, teoreettisesti askarruttava. Alussa tila harmonisen oskillaattroin perustila:

$$\Psi(x,0) = \phi_0 = (\frac{m\omega}{\pi\hbar})^{1/4} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)} \ . \tag{6}$$

Tila muuttuu ´nopeasti´, jolloin $\omega -> 2\omega$. Mitä tällöin ovat systeemin tilojen energiat (Hint inside a hint (hintception): vain taajuus muuttuu)? Muutos niin nopea, ettei aaltofunktio ehdi muuttua. Tällöin vanha tila (harmonisen oskillaattorin perustila) on uusien tilojen superpositio (myös uudet tilat harmonisen oskillaattroin tiloja, mutta pienellä muutoksella, mikä tämä muutos voisi olla?). Ratkaise todennäköisyys amplitudi uudelle perustilalle ja tästä todennäköisyys.

Tehtävä 5

Muistuttaa hyvin paljon 3. tehtävää, nyt kuitenkin aika mukana pyörittelyissä. Kannattaa merkitä

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &=> |0\rangle \\ \phi_2(x) &=> |2\rangle \ . \end{aligned}$$