

PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka  
 Laskuharjoitus 5, viikko 48

1. Koska ominaistilojen merkitys on voinut jäädä vielä hiukan epäselväksi, laske eksplisiit-  
 tisesti sijoittamalla energian ominaisarvoyhtälöön  $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ , että

$$\psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2^3 3!}} \left( \frac{1}{\pi \sigma^2} \right)^{1/4} H_3(x/\sigma) \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad (1)$$

missä  $\sigma = \sqrt{\hbar/m\omega}$  ja  $H_3(y) = 8y^3 - 12y$  on yksi harmonisen oskillaattorin ominaistiloista. Ratkaise myös sitä vastaava ominaisarvo  $E_3$ . (Harmonisen oskillaattorin potentiaali oli  $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ .)

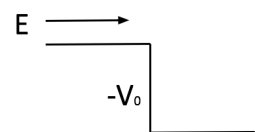
2. a) Häiriöteoriassa lähtökohta on ratkaista ensin joku dominoiva termi ensin ja sitten las-  
 kea sille korjaus käyttäen hyväksi oletusta, että korjaus on "pieni". Oletetaan, että poten-  
 tiaalimme on  $V(x) = m\omega^2 x^2/2 + \epsilon x^3$ , missä  $\epsilon$  on "pieni". Lausu  $\epsilon x^3$  luomis- ja hävitys-  
 operaattorien avulla. (Vihje: kohtaa b) auttaa, jos lausut tuloksen sellaisessa muodossa  
 missä esiintyy mahdollisimman paljon numero-operaattoreita  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ .)

b) Laske myös  $\langle n | \epsilon x^3 | n \rangle$  harmonisen oskillaattorin ominaistiloille. Tämä odotusarvo on  
 itse asiassa häiriöteoriassa ensimmäisen kertaluvun korjaus ominaisenergioihin. Tulos  
 on tässä tapauksessa melko helppo.

Vihje: Huomaa, että vain termit joissa olisi sama määrä luomis- ja hävitysoperaattoreita  
 ovat tässä relevantteja. Miksi?

Hiukkanen, jonka massa on  $m$  ja jolla on liike-energia  $E > 0$  lä-  
 hestyy jyrkkää potentiaalipudotusta  $V_0$ .

3. a) Laske hiukkasen heijastumiskerroin.  
 b) Sovella edellistä tulosta arvioimalla nopean neutronin todennä-  
 köisyys aiheuttaa ytimen fissio. Mallinna neutronin kokema pot-  
 entiaalia potentiaaliaskeleella, jonka syvyys on  $12 \text{ MeV}$  ja olet  
 neutronin energiaksi  $4 \text{ MeV}$  (tyypillinen energia neutronille, joka  
 on syntynyt jonkun toisen ytimen fissiosta). Jos potentiaaliaske-  
 leen syvyys kasvaa, kasvaako vai pieneneekö fission todennäköi-  
 syys? Oleta myös, että läpäisystä seuraa fissioreaktio. Oikeassa  
 maailmassahan myös muita vaihtoehtoja on.



4. Oletetaan elektronille potentiaali  $V(x) = -V_0 \exp(-x^2/l^2)$ , missä  $V_0 > 0$ . Tämä potentiaali voi olla realistisempi kuin tarkka laatikkopotentiaali tai harmonisen oskillaattorin potentiaali, mutta tätä vastaavia ominaistiloja tuskin pystyt analyttisesti laskemaan (kolminkertainen eläkönhuuto luennolla sille, joka tässä onnistuu). Koetetaan kuitenkin löytää järkevä arvio parille alimmalle energiatilalle.

a) Approksimoi potentiaalia harmonisella oskillaattorilla, jonka sovitat potentiaalini minimiin. Mitkä ovat vastaavat energian ominaisarvot? (Huomaa, että ylläolevan potentiaalini minimi on  $-V_0$ , joka tuottaa vakiosiirtymän harmonisen oskillaattorin ominaistilojen energioihin.)

b) Perustuen harmoniseen approksimaatioon arvioi kuinka monta sidottua tilaa potentiaalissa on, kun joko  $V_0 = 1 \text{ eV}$  tai  $V_0 = 2 \text{ eV}$ . Valitse myös  $l = 1 \text{ nm}$ . Vihje: Kuinka suuri kvanttiluku  $n$  vaaditaan, jotta ominaistilan energia on suurempi kuin nolla?

5. Qubitin Hamiltonin operaattori on

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega^* & E_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ratkaise tämän ominaisarvot ja ominaistilat. Toisin sanoen ratkaise

$$\hat{H} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

ominaisarvoille  $E$  ja vektoreille joiden komponentit ovat  $x$  ja  $y$  ( $\sqrt{|x|^2 + |y|^2} = 1$ ). Apuna:

- Voit lyhentääksesi merkintöjä hiukan ja asettaa  $E_2 = 0$ .
- Ei-triviaalit ratkaisut asettamalla asiaankuuluvan matriisin determinantti nolaksi.
- Huomaa, että amplitudin  $y$ , vaihetekijä/etumerkki on toisella ratkaisulla erilainen kuin toisella.

(Huomio: Ratkaistuasi ominaistilat olet siis käytännössä ratkaissut mielivaltaisen qubitin aikakehityksen, koska voit esittää alkutilan superpositiona ominaistiloista joiden aikakehitys on helppo.)

Palautetaan seuraavan viikon perjantaihin mennessä MyCoursesissa olevaan laatikkoon yhtenä pdf-tiedostona.