PHYS-C0210 Kvanttimekaniikka

Laskuharjoitus 5, Vinkit

Tehtävä 1

Kyseessä on suora sijoitus eli sinänsä suoraviivainen lasku. Kannattaa laskea lasku muutamassa eri osassa. Hamilton on jälleen tuttu

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \;, \tag{1}$$

missä potentiaali $V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ on tuttu harmoninen potentiaali (sama kuin lukiosta tuttu jousipotentiaali, jousikerroin $k = m\omega^2$.) Laskussa tarvitaan Hermiten polynomin $H_3(x)$ ja Gaussisen funktion $\exp(-x^2/2\sigma^2)$ ensimmäiset ja toiset derivaatat, joten nämä kannattaa laskea erikseen selkeyden vuoksi ja lopuksi sijoittaa tulon derivoimissäännöstä saatavaan muotoon. Funktion etuvakiot voi lisätä tulokseen lopuksi, sillä sekä yhteenlasku että derivaatta ovat lineaarisia eli skalaarilla kertomisen, derivaatan ja yhteenlaskun järjestyksellä ei ole väliä. Huomaa, että ominaisenergiaksi pitäisi tulla $E_3 = 7\hbar\omega/2$.

Tehtävä 2

a)

Suoraviivainen lasku jälleen. Muista, että paikkaoperaattorin saa nosto- ja laskuoperaattorien avulla seuraavasti $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$.

b)

Muista, että harmonisen oskillaattorin ominaistilat $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \ldots$ ovat ortonormaalit eli $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$, missä $\delta_{m,n}$ on tähän mennessä tutuksi tullut Kroneckerin delta, $\delta_{m,n} = 1$, jos $m = n$, muutoin $\delta_{m,n} = 0$. Lisäksi, muista että $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ laskevat ja nostavat ominaistilan indeksiä yhdellä. Tuloksen voi ennakoida myös siitä, että aaltofunktion itseisarvon neliö on parillinen ja x^3 on pariton funktio: parillinen funktio $\times$ pariton funktion on pariton funktio. Paikkakannassa siis laskettava termi on integraali koko reaaliakselin yli parittomasta funktiosta.

Tehtävä 3

a)

Heijastus- ja läpäisykertoimien määritelmä: Oletetaan, että aalto tulee vasemmalta kohti potentiaalin muutosta kohdassa $x = 0$: Tällöin sen aaltofunktio on muotoa hiukkanen potentiaalissa

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_L(x,t) = \exp(i(k_L x - \omega t)) + r\exp(i(-k_L x - \omega t)), & \text{jos } x < 0 \\ \psi_R(x,t) = t\exp(i(k_R x - \omega t)), & \text{jos } x \geq 0\,, \end{cases} \quad (2)$$

missä alaindeksit L, R viittaavat vasempaan (left) ja oikeaan (right) puoleen, $k_L = \sqrt{2mE/\hbar}$ ja $k_R = \sqrt{2m(E+V_0)/\hbar}$ ovat hiukkasen aaltoluvut vasemmalla ja oikealla puolella, kulmataajuus on $\omega = E/\hbar$ (sama molemmilla puolilla) ja r, t ovat heijastus -ja läpäisyamplitudit. Heijastuskerroin on $R = |r|^2$. Tämä saadaan laskettua käyttämällä ym. muotoa olevaa yritettä, kun vaaditaan että rajapinnalla $x = 0$ aaltofunktio ja sen derivaatta ovat jatkuvat. Huomaa, että ajat on mainittu lähinnä sen vuoksi, että termeistä näkee mihin suuntaan mikin aalto liikku (positiivinen $k \to$ hiukkanen liikkuu oikealle, negatiivinen $k \to$ hiukkanen liikkuu vasemmalle). Varsinaisissa laskuissa aikariippuvuus kumoutuu pois.

b)

Oletetaan nyt, että läpäisykerroin T kertoo fissiotodennäköisyyden. Läpäisy- ja heijastuskertoimille pätee $T + R = 1$. Huomaa, että $T \neq |t|^2$. Tähän syynä on, että oikealle puolella hiukkasten vauhti $v = p/m = \hbar k/m$ on eri kuin vasemmalla. Hiukkasvuo on intensiteetti $\times$ vauhti: vasemmalla sisääntulevien hiukkasten hiukkasvuo on Av_L, missä A on jokin vakion yksiköllä $1/[v]$, heijastuvien hiukkasvuo on $A|r|^2 v_L$ ja läpäisevien hiukkasvuo on $A|t|^2 v_R$. Läpäisykerroin on läpäisevän vuon ja sisään tulevan vuon suhde: $T = A|t|^2 v_R/(Av_L) = |t|^2 k_R/k_L$. (Vastaavasti nähdään, että $R = A|r|^2 v_L/(Av_L) = |r|^2$.) Koska vuo säilyy rajapinnalla, niin $T + R = 1$. Määritä läpäisykertoimen T kaava aaltolukujen k_L, k_R sekä energioiden E, V_0 avulla. V_0 ja E vaikutuksen läpäisykertoimeen saa esimerkiksi derivaatan merkistä ko. energian E ja potentiaalin V_0 arvoilla, derivoitaessa läpäisykerrointa T tarkastellun parametrin suhteen. Mieti myös, mitä odottaisit fysikaalisesti tuloksesta?

Tehtävä 4

a)

Tehtävässä sovitetaan potentiaalin minimiin, joka nähdään derivaatan nollakohtien perusteella olevan kohdassa $x = 0$. Tehtävässä sovitetaan annettuun potentiaaliin harmoninen potentiaali $m\omega^2 x^2/2$ siten, että lähellä minimiä tulos on x^2-kertalukuun asti sama. Käytännössä tämä tarkoittaa, että voidaan käyttää lähellä minimiä Taylorin polynomia $\exp(-x^2/l^2) \approx 1 - x^2/l^2 + \mathcal{O}(x^4)$. Huomataan, että potentiaalissa on vakio-osa. Tämän vaikutus on, että se siirtää ominaisenergioita, joten se voidaan ottaa huomioon laskussa lopuksi (voidaan kirjoittaa $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) + m\omega^2 x^2/2\psi(x) = (E + V_0)\psi(x)$ ts. siirtää vakiopotentiaali laskussa ominaisarvoyhtälön oikealle puolelle). Nyt voidaan määrittää sovituksen ω suoraan vertailemalla saatua lauseketta ja muotoa $m\omega^2 x^2/2$.

Energian ominaisarvot ovat nyt $E_n - V_0$, missä E_n ovat oskillaattorin ominaisenergiat.

b)

Sidotut tilat ovat energiatilat, joiden energiat ovat negatiiviset $E < 0$. Muista, että n voi olla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Tehtävä 5

Tämä tehtävä on esimerkki tilanteesta, jossa systeemin Hilbertin avaruuden dimensio on äärellinen, tässä tapauksessa 2. Tällöin aaltofunktiota ei voi määrittää, sillä systeemillä ei ole paikkakantaa (systeemiä ei ajatella 3D-avaruudessa vaan kahden tilan virittämässä vektoriavaruudessa.) Tässä aaltofunktion sijaan tiloja esittävät valitussa kannassa pystyvektorit. Tällöin ominaisarvotehtävä on tuttu matriisien ominaisarvo-ongelma.

Ominaisarvot matriiseille määräytyävt yhtälön ei-triviaaleina $x \neq 0$ ratkaisuina $Ax = \lambda x$, missä A on matriisi, x on ominaisvektori ja λ on ominaisarvo. Jos matriisi $A - \lambda I$, missä I on yksikkömatriisi on kääntyvä, niin ainoa ratkaisu on $x = 0$. Näin ollen, pitää vaatia, että matriisi $A - \lambda I$ ei käänny eli $\det(A - \lambda I) = 0$. Tästä voi ratkaista ominaisarvot. Ominaisvektorit saa kertomalla mitä tahansa matriisin $A - \lambda I$ riviä vektorilla $(x, y)^T$ ja vaatimalla, että tulos on 0. Lisäksi tilanteessa vaaditaan normalisointi, $|x|^2 + |y|^2 = 1$.