

Todennäköisyyden laskusäännöt

Tässä harjoituksessa on muista poiketen 4 tuntitehtävää. Kotitehtäviä on 2 kpl, kuten yleensäkin.

Tuntitehtävät

1A1 (Kaksi noppaa.) Kun tavallista noppaa heitetään kaksi kertaa, voidaan satunnaisilmiöön liittyvä perusjoukko määritellä kaavalla

$$S = \{(x, y) : x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ ja } y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

missä x = ensimmäisen heiton tulos ja y = toisen heiton tulos. Väritä perusjoukkoa kuvaavaan 6×6 -ruudukkoon seuraavat tapahtumat ja määritä niiden todennäköisyydet:

- | | |
|--|--|
| (a) $A = \{(x, y) \in S : x = 2\}$, | (d) $A \cup C =$ joukkojen A ja C yhdiste, |
| (b) $B = \{(x, y) \in S : y > 4\}$, | (e) $B \cap C =$ joukkojen B ja C leikkaus, |
| (c) $C = \{(x, y) \in S : x + y = 7\}$, | (f) $C \setminus A =$ joukkojen C ja A erotus. |

1A2 (Maanäytteet.) Kaatopaikan läheisestä maaperästä satunnaisesti kerätyistä näytteistä löydetään todennäköisyydellä 0.35 haitallinen määrä arseeniyhdisteitä, ja todennäköisyydellä 0.25 haitallinen määrä lyijyä. Todennäköisyydellä 0.45 löydetään haitallinen määrä arseeniyhdisteitä tai lyijyä.

- (a) Millä todennäköisyydellä näytteistä löydetään sekä arseeniyhdisteitä että lyijyä?
- (b) Millä todennäköisyydellä löydetään lyijyä mutta ei arseeniyhdisteitä?

1A3 (Sininen taksi.) Kaupungissa liikennöi sata taksia, joista yksi on sininen ja loput vihreitä. Eräänä yönä yksi takseista ajaa polkupyöräilijän päälle ja pakenee paikalta. Silminnäkijän lausunnon mukaan yliajanut taksi oli sininen, minkä johdosta poliisi vangitsee sinisen taksin kuljettajan epäiltynä törkeästä liikenneturvallisuuden vaarantamisesta. Aiempien tutkimusten perusteella tiedetään, että vastaavissa olosuhteissa silminnäkijät näkevät sinisen auton sinisenä 95% todennäköisyydellä ja vihreän auton sinisenä 2% todennäköisyydellä.

Mikä on todennäköisyys, että yliajoon syyllistynyt taksi oli sininen? Tulisiko sinisen taksin kuljettaja tuomita tämän näytön perusteella?

1A4 (Täyskäsi.) Viiden kortin vetopokerissa pelaaja saa käteensä tavallisesta 52 kortin pakasta satunnaisesti arvotut viisi korttia. Laske todennäköisyys saada täyskäsi: kolme samanarvoista korttia ja kaksi samanarvoista korttia, esim. $5\heartsuit, 5\diamondsuit, 5clubsuit, 7spadesuit, 7clubsuit$ tai $6\heartsuit, Q\diamondsuit, 6\diamondsuit, Qspadesuit, Qclubsuit$.

Kotitehtävät

1A5 (Valheenpaljastuskone.) Valheenpaljastuskone luokittelee valehtelevan henkilön valehtelijaksi todennäköisyydellä 90%. Lisäksi tiedetään, että kone virheellisesti luokittelee rehellisen henkilön valehtelijaksi todennäköisyydellä 5%. Oletetaan, että valheenpaljastuskonetta käytetään ihmisjoukkoon, jossa 1% valehtelee.

- (a) Mikä on todennäköisyys, että satunnaisesti valittu henkilö luokitellaan valehtelijaksi?
- (b) Mikä on todennäköisyys, että valehtelijaksi luokiteltu henkilö onkin rehellinen?

1A6 (Kerrostalon salasanat) Kerrostalon alaoven salasanat ovat muotoa NNNNN, missä N on jokin numeroista 0,1,...9. Laske mahdollisten salasanojen lukumäärät, kun salasanojen muodostamista rajoittavat seuraavat ehdot:

- (a) Mikään numero ei saa toistua salasanassa.
- (b) Salasanassa on oltava "pari" eli täsmälleen kaksi samaa numeroa kaikkien muiden numeroiden ollessa eri (esim. 23783).

Oletetaan että salasanat generoidaan täysin satunnaisesti kaikkien mahdollisten salasanojen joukosta. Laske seuraavien tapahtumien todennäköisyydet:

- (c) Mikään numero ei toistu salasanassa.
- (d) Salasanassa on "pari" (kuten yllä).