

1B Diskreetit satunnaismuuttujat

Tuntitehtävät

1B1 (Susipari lintutarhassa.) Lintutarhassa asuu kolme ankkaa, kolme hanhea ja neljä kanaa. Yön pimeydessä lintutarhaan saapuu kaksi sutta, joista kumpikin pyydystää yhden satunnaisesti valitsemansa linnun. Merkitään

$$\begin{aligned} X &= \text{pyydystettyjen ankojen lukumäärä,} \\ Y &= \text{pyydystettyjen hanhien lukumäärä.} \end{aligned}$$

- (a) Määritä satunnaismuuttujan X jakauma listaamalla taulukkoon X :n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.
- (b) Määritä satunnaismuuttujan Y jakauma.
- (c) Määritä satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma listaamalla parin (X, Y) mahdollisten arvojen todennäköisyydet 3×3 -taulukkoon.
- (d) Laske (c)-kohdan taulukon rivi- ja sarakesummat ja vertaa niitä (a)-kohdan taulukkoon.
- (e) Laske (c)-kohdan taulukon avulla todennäköisyys, että susipari pyydystää yhtä monta ankkaa ja hanhea.
- (f) Selvitä (c)-kohdan taulukon avulla, ovatko satunnaismuuttujat X ja Y stokastisesti riippuvat vai riippumattomat?

1B2 (Tuntematon noppa.) Laatikossa on neljä noppaa, yksi 4-sivuinen, yksi 6-sivuinen ja kaksi 8-sivuisia. Kaikki nopat on numeroitu normaaliin tapaan ykkösestä eteenpäin. Ystäväsi valisee laatikosta salaa yhden nopan umpimähkään ja heittää sitä kerran näyttämättä noppaa sinulle. Merkitään

$$\begin{aligned} S &= \text{valitun nopan sivujen lukumäärä,} \\ T &= \text{nopanheiton tulos.} \end{aligned}$$

- (a) Määritä satunnaismuuttujan S jakauma listaamalla taulukkoon S :n mahdolliset arvot ja niiden todennäköisyydet.
- (b) Määritä satunnaismuuttujien S ja T yhteisjakauma listaamalla 3×8 -taulukkoon parin (S, T) mahdollisten arvojen todennäköisyydet.
- (c) Määritä (b)-kohdassa lasketun yhteisjakauman avulla satunnaismuuttujan T jakauma.
- (d) Ystäväsi paljastaa, että nopanheiton tulos on 3. Selvitä satunnaismuuttujan S ehdollinen jakauma tämän tiedon valossa.

Kotitehtävät

1B3 (Epätransitiiviset nopat.) Pöydällä on kolme 4-sivuista noppaa: punainen, keltainen ja vihreä. Kaksi pelaajaa istuu pöytään, kumpikin valitsee yhden nopan ja heittää sitä kerran. Suurimman silmäluvun saanut voittaa. Noppien sivut on numeroitu seuraavasti:

Noppa	Silmäluvut
Punainen	3,3,3,6
Keltainen	2,2,5,5
Vihreä	1,4,4,4

Merkitään punaisen, keltaisen ja vihreän nopan tuloksia satunnaismuuttujilla X, Y ja Z .

- Määritä X :n ja Y :n yhteisjakauma 2×2 -taulukkona.
- Millä todennäköisyydellä punainen noppa voittaa keltaisen?
- Millä todennäköisyydellä keltainen noppa voittaa vihreän?
- Millä todennäköisyydellä vihreä noppa voittaa punaisen? Jos joku pyytäisi sinua pelaamaan kanssaan tätä noppapeliä, minkä nopan valitsisit?

Vapaaehtoinen lisätehtävä (tätä ei arvioida):

- (e*) Kahden heiton pelissä Aada heittää kaksi kertaa punaista noppaa ja Bertta kaksi kertaa keltaista noppaa. Pelin voittaa se, jonka heittojen silmälukujen summa on suurempi. Millä todennäköisyydellä Aada voittaa Bertan? Onko tässä tuloksessa mielestäsi mitään outoa?

1B4 (Lasten lukumäärä.) Pariskunta päättää hankkia lapsia kunnes jompi kumpi seuraavista ehdoista täyttyy:

- Heillä on kaksi tyttölasta.
- Heillä on yhteensä kolme lasta.

Oletetaan, että joka lapsi on yhtä suurella todennäköisyydellä ($= 0.5$) tyttö tai poika, että aikaisempien lasten sukupuoli eivät vaikuta myöhempien lasten sukupuoliin ja että lapsia syntyy yksi kerrallaan (ei kaksosia, kolmosia jne.).

Oletetaan, että perhe on jo lopettanut lasten hankinnan (jompi kumpi ylläolevista ehdoista on siis täyttynyt) ja merkitään

$$\begin{aligned}L &= \text{lasten lukumäärä perheessä,} \\T &= \text{tyttölasten lukumäärä perheessä,} \\P &= \text{poikalasten lukumäärä perheessä.}\end{aligned}$$

- Määritä satunnaismuuttujan L jakauma.

- (b) Määritä satunnaismuuttujien T ja P yhteisjakauma.
- (c) Millä todennäköisyydellä perheessä on enemmän tyttölapsia kuin poikalapsia?
- (d) Määritä satunnaismuuttujien L ja T yhteisjakauma.