

4B Parametrien estimointi

Tuntitehtävät

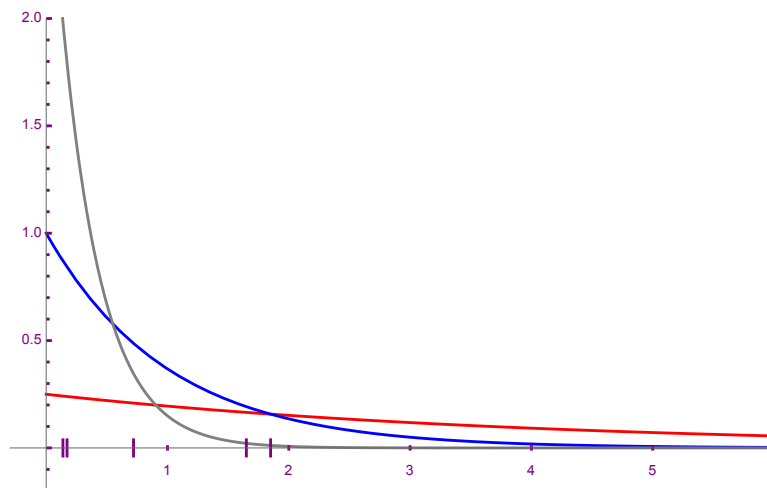
4B1 (Palvelupyynnöiden väliajat.) Palvelimelle saapuvien palvelupyynnöiden väliaikojen (yksikkönä sekunti) tiedetään olevan toisistaan riippumattomia ja jakautuneen tiheysfunktion

$$f_{\lambda}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

mukaisesti, missä $\lambda > 0$ on tuntematon parametri. Palvelimen käynnistyttyä on mitattu väliajat 0.16, 1.85, 0.15, 0.72, 1.65.

- (a) Alla on hahmoteltu tiheysfunktion kuvaaja parametrin λ arvoilla 0.25 (punainen), 1.00 (sininen) ja 3.00 (harmaa). Arvioi silmämääräisesti, mikä arvoista sopisi parhaiten havaintoihin (merkitty vaaka-akselille).
- (b) Estimoi parametri λ suurimman uskottavuuden menetelmällä.

(**Vihje:** Uskottavuusfunktio $L(\lambda)$ maksimoiduu samassa pisteessä, missä logaritminen uskottavuusfunktio $\ell(\lambda) = \log(L(\lambda))$. Jälkimmäistä saattaa olla mukavampi derivoida.)



4B2 (Jatkuva tasajakauma.) Jatkuvan välin $[0, b]$ tasajakaumalla on tiheysfunktio

$$f_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & 0 \leq t \leq b, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

(a) Estimoi suurimman uskottavuuden menetelmällä tasajakauman parametri b havaitun datajoukon (1.3, 1.9, 3.6, 1.1, 5.1) pohjalta.

(**Vihje:** Uskottavuusfunktion maksimin voi löytää ilman derivointia.)

(b) Kirjoita suurimman uskottavuuden estimaattorin $\hat{b}(x)$ lauseke yleiselle datajoukolle $x = (x_1, \dots, x_n)$.

(c) Tutki tapauksessa $n = 2$, onko estimaattori $\hat{b}(x)$ harhaton.

(d) Vaihtoehtoinen estimaatti parametrille b saadaan kaavasta

$$\tilde{b}(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Tutki tapauksessa $n = 2$, onko estimaattori $x \mapsto \tilde{b}(x)$ harhaton.

Kotitehtävät

4B3 (Hevosenpotkut.) Ladislaus Bortkiewicz (1868-1931) mallinsi hevosen potkuihin kuolleiden sotilaiden lukumäärää Preussin armeijan eri varuskunnissa Poisson-jakaumalla, jonka tiheysfunktio on,

$$f(k | \lambda) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

missä parametri $\lambda > 0$ on tuntematon. (Yllä olevassa kaavassa nollan kertoma tulkitaan ykköseksi, $0! = 1$.)

Eräänä vuonna neljäsatoista varuskunnassa hevosen potkuihin kuolleiden määrät olivat 2, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1. Oleta, että kuolleiden määrät eri varuskunnissa ovat riippumattomia ja määritä edellisiin havaintoihin perustuva suurimman uskottavuuden estimaatti parametrille λ .

(**Vihje:** Kannattaa maksimoida uskottavuusfunktion logaritmia.)

4B4 (Beta-jakauman sovittaminen.) Määritä suurimman uskottavuuden estimaatti Beta-jakauman

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha t^{\alpha-1}, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{muuten,} \end{cases}$$

muotoparametrille $\alpha > 0$, kun on havaittu datapisteet $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.5$ ja $x_3 = 0.9$.

(**Vihje:** Kannattaa jälleen maksimoida uskottavuusfunktion logaritmia.)