MS-A0503 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi

Esimerkkikokoelma 5

Aiheet:

Tilastolliset testit

Yhden otoksen *t*-testi

Testausasetelma yhden otoksen *t*-testissä odotusarvolle

Olkoon

$$X_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

riippumaton satunnaisotos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat X_i ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$:

$$X_1, X_2, \cdots, X_n \perp$$
$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\,,\ i = 1,2,\ldots,n$$

Normaalijakauman parametreja μ, σ^2 ei tunneta. Sen sijaan on havaittu datapisteet $x = (x_1,\ldots x_n)$.

Asetetaan normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ tuntemattomalle odotusarvolle nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0\,.$$

Testausongelma: Ovatko havainnot sopusoinnussa nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *yhden otoksen t-testi odotusarvolle*.

Hypoteesit yhden otoksen *t*-testissä odotusarvolle

Tilastokokeen stokastista mallia koskeva *pohjahypoteesi* H:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$
$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\,,\ i = 1,2,\ldots,n$$

Pohjahypoteesiä ei tässä yhteydessä testata, vaan sen oletetaan olevan varmistettu muilla tavoin.

Nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0\,.$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{H}_1 &: \mu > \mu_0 \\ \mathrm{H}_1 &: \mu < \mu_0\end{aligned}\right\}\ \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi yhden otoksen *t*-testissä odotusarvolle

Olkoot

$$m(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ja

$$s^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m(X))^2$$

tilastokokeen stokastista mallia vastaava keskiarvo ja otosvarianssi.

Testisuure yhden otoksen *t*-testissä odotusarvolle

Määritellään testisuure

$$t(X) = \frac{m(X) - \mu_0}{s(X)/\sqrt{n}}.$$

Jos pohjahypoteesi H ja nollahypoteesi H_0 ovat voimassa, niin (satunnainen) testisuure $t(X)$ noudattaa *Studentin t-jakaumaa* vapausastein n-1. R-ohjelmalla ko. jakauman kertymäfunktio pisteessä x saadaan komennolla `pt(x,n-1)`.

Testisuureen $t(X)$ normaaliarvo on nolla, koska nollahypoteesin H_0 pätiessä

$$\mathrm{E}(t(X)) = 0.$$

Siten itseisarvoltaan suuret testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 ei päde.

Hylkäysalueen määrittäminen yhden otoksen *t*-testissä odotusarvolle

Valitaan testin merkitsevyystasoksi α.

(i) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0 ,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(+t_\alpha, +\infty).$$

Kriittinen arvo $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t(X) \geq +t_\alpha) = \alpha ,$$

joka on n-1 vapausasteen Studentin t-jakauman tason 1-α kvantiili, eli R:llä t_α = qt(1-α, n-1).

(ii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0 ,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(-\infty, -t_\alpha).$$

Kriittinen arvo $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t(X) \leq -t_\alpha) = \alpha ,$$

missä $-t_\alpha$ on n - 1 vapausasteen Studentin t-jakauman tason α kvantiili. Luku t_α saadaan R:llä kaavasta t_α = -qt(α, n-1) = qt(1-α, n-1).

(iii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0 ,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(-\infty, -t_{\alpha/2}) \cup (+t_{\alpha/2}, +\infty).$$

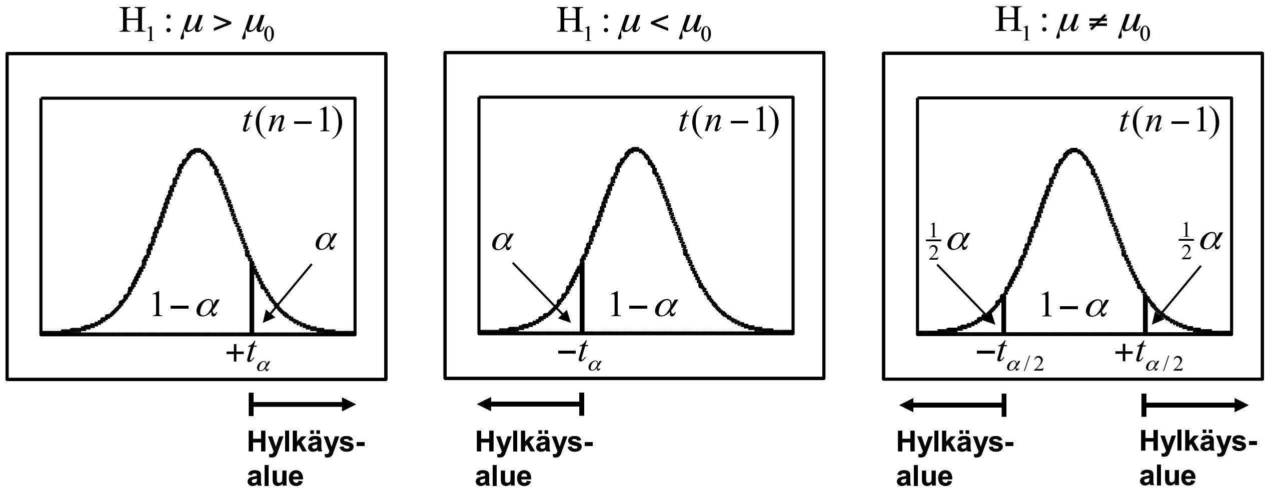
Kriittiset arvot $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$
$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

eli R:llä $t_{\alpha/2}$ = qt(1-α, n-1).

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

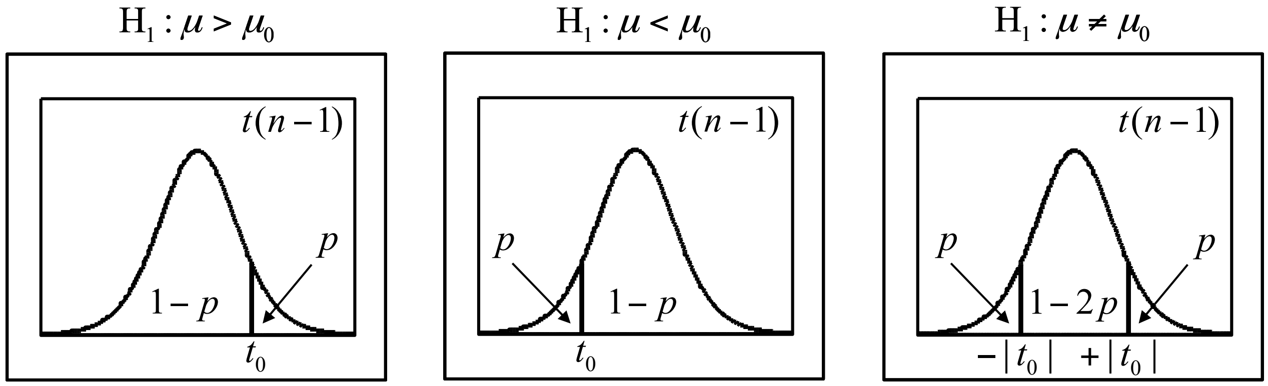
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *hylkäysalueen* määräämistä:



p-arvon määrittäminen yhden otoksen t-testissä odotusarvolle

Olkoon testisuureen datajoukosta $x=(x_1,\ldots,x_n)$ laskettu arvo $t_0 = t(x)$.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin p-arvon määrittämistä:



Testin p-arvo $= p$ Testin p-arvo $= p$ Testin p-arvo $= 2p$

Nollahypoteesi hylätään, jos testin p-arvo on pieni.

Yhden otoksen testi varianssille

Olkoon

$$X_i\,,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

satunnaisotos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat X_i , $i = 1, 2, \ldots , n$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$:

$$X_1, X_2, \cdots, X_n \perp$$
$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\,,\; i = 1,2,\ldots,n$$

Asetetaan normaalijakauman $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ varianssiparametrille σ^2 nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2\,.$$

Testausongelma: Ovatko havainnot sopusoinnussa nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *yhden otoksen* χ^2*-testi varianssille*.

Hypoteesit yhden otoksen testissä varianssille

Yleinen hypoteesi H

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$
$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 .$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}_1 &: \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \mathrm{H}_1 &: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{aligned}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi yhden testissä varianssille

Olkoot

$$m(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ja

$$s^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m(X))^2$$

tavanomaiset harhattomat estimaattorit normaalijakauman parametreille μ ja σ^2. Tunnusluku $m(X)$ on tilastokokeen stokastisen mallin $X=(X_1,\ldots,X_n)$ keskiarvo ja $s^2(X)$ sen otosvarianssi.

Testisuure yhden otoksen testissä varianssille

Määritellään testisuure

$$\chi^2(X) = \frac{(n-1)s^2(X)}{\sigma_0^2}.$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, niin testisuure $\chi^2(X)$ noudattaa χ^2-jakaumaa ("khii toiseen") vapausastein $n - 1$. Testisuureen $\chi^2(X)$ normaaliarvo on $n - 1$, koska nollahypoteesin H_0 pätiessä

$$\mathrm{E}(\chi^2(\mathrm{X})) = n - 1.$$

Siten sekä pienet että suuret testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 ei päde.

Hylkäysalueen määrääminen yhden otoksen testissä varianssille

Valitaan testin merkitsevyystasoksi α.

(i) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 ,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(\chi_{\alpha}^2, +\infty).$$

Kriittinen arvo χ_{α}^2 saadaan ehdosta

$$\Pr(\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2) = \alpha,$$

mssä $\chi^2 : \ \chi^2(n-1)$.

(ii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(0, \chi_{1-\alpha}^2).$$

Kriittinen raja $\chi_{1-\alpha}^2$ saadaan ehdosta

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2) = \alpha,$$

missä $\chi^2 : \ \chi^2(n-1)$.

(iii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(0, \chi_{1-\alpha/2}^2) \cup (\chi_{\alpha/2}^2, +\infty)$$

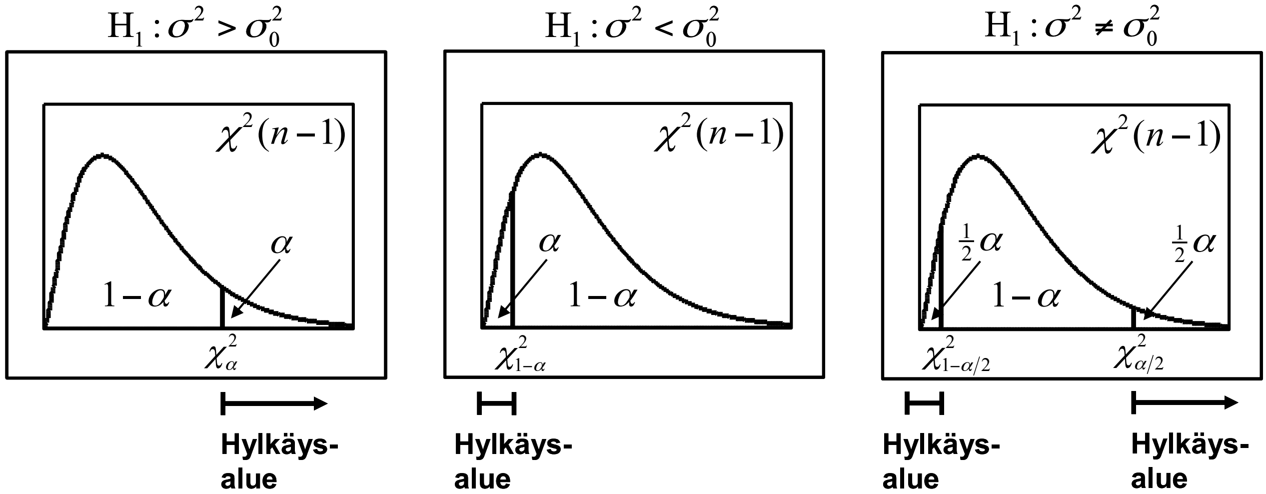
Kriittiset arvot $\chi_{1-\alpha/2}^2$ ja $\chi_{\alpha/2}^2$ saadaan ehdoista

$$\Pr(\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2) = \alpha/2$$
$$\Pr(\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2) = \alpha/2$$

missä $\chi^2 : \ \chi^2(n-1)$.

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

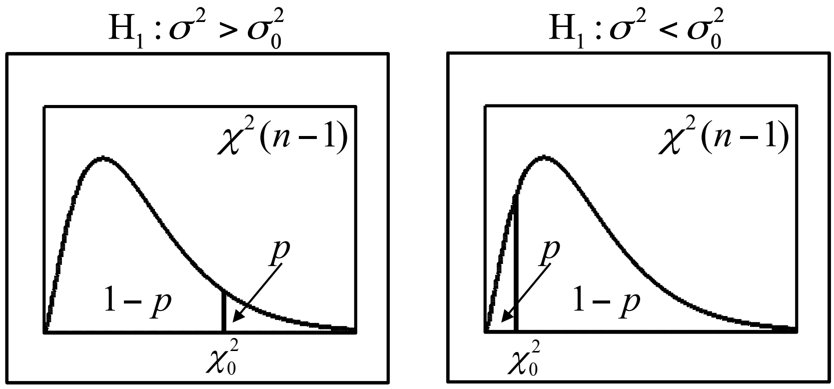
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin hylkäysalueen määräämistä:



***p*-arvon määrääminen yhden otoksen testissä varianssille**

Olkoon testisuureen datajoukosta $x=(x_1,\ldots,x_n)$ laskettu arvo $\chi_0^2 = \chi_0^2(x)$.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *p-arvon* määräämistä, kun vaihtoehtoinen hypoteesi on yksisuuntainen:



Testin p-arvo $= p$ Testin p-arvo $= p$

Kaksisuuntaisen vaihtoehtoisen hypoteesin

$$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

tapauksessa testin p-arvo on

$$p = 2 \times \min\left\{\Pr(\chi^2 \geq \chi_0^2), \Pr(\chi^2 \leq \chi_0^2)\right\}$$

jossa

$$\chi^2 : \ \chi^2(n-1)$$

Nollahypoteesi hylätään, jos testin p-arvo on pieni.

Kahden riippumattoman otoksen *t*-testi

Testausasetelma kahden riippumattoman otoksen *t*-testissä odotusarvoille

Olkoon

$$X_{i1}\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n_1$$

satunnaisotos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat X_{i1} , $i = 1, 2, \ldots , n_1$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$:

$$X_{11}, X_{21}, \cdots, X_{n_1 1} \perp$$

$$X_{i1} \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)\ ,\ i = 1,2,\ldots,n_1$$

Olkoon

$$X_{j2}\ ,\ j = 1, 2, \ldots , n_2$$

satunnaisotos normaalijakaumasta $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$. Tällöin satunnaismuuttujat X_{j2} , $j = 1, 2, \ldots , n_2$ ovat riippumattomia ja noudattavat samaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$:

$$X_{12}, X_{22}, \cdots, X_{n_2 2} \perp$$

$$X_{j2} \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)\ ,\ j = 1,2,\ldots,n_2$$

Oletetaan lisäksi, että otokset

$$X_{i1}\ ,\ i = 1, 2, \ldots , n_1$$

ja

$$X_{j2}\ ,\ j = 1, 2, \ldots , n_2$$

ovat riippumattomia toisistaan.

Asetetaan normaalijakaumien $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ ja $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ odotusarvo- eli paikkaparametreille μ_1 ja μ_2 nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu\,.$$

Testausongelma: Ovatko havainnot sopusoinnussa nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *kahden riippumattoman otoksen t-testi* odotusarvoille.

Hypoteesit kahden riippumattoman otoksen *t*-testissä odotusarvoille

Yleinen hypoteesi H:

$$X_{i1} \sim \mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)\ ,\ i = 1,2,\ldots,n_1$$

$$X_{j2} \sim \mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)\ ,\ j = 1,2,\ldots,n_2$$

Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat *riippumattomia* kaikille i ja j

Nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2 \\ \mathrm{H}_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{array}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi kahden riippumattoman otoksen *t*-testissä odotusarvoille

Olkoot

$$m_k(X) = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}\ , k = 1,2$$

ja

$$s_k^2(X) = \frac{1}{n_k - 1}\sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - m_k(X))^2\ , k = 1,2$$

tavanomaiset harhattomat estimaattorit normaalijakauman parametreille μ_k ja σ_k^2.

Tunnusluku $m_k(X)$ on havaintojen X_{ik} , i = 1, 2, … , n_k, *keskiarvo* ja $s_k^2(X)$ on havaintojen X_{ik} , i = 1, 2, … , n_k , *otosvarianssi*.

Testisuure yleisessä tapauksessa kahden riippumattoman otoksen *t*-testissä odotusarvoille

Määritellään tilastokokeen stokastista mallia vastaava testisuure

$$t_A(X) = \frac{m_1(X) - m_2(X)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2(X)}{n_1} + \dfrac{s_2^2(X)}{n_2}}}.$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, niin testisuure t_A noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa N(0,1).

Testisuureen t_A(X) normaaliarvo on nolla, koska nollahypoteesin H_0 pätiessä

$$\mathrm{E}(t_A(\mathrm{X})) = 0.$$

Siten itseisarvoltaan suuret testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 ei päde.

Pienissä otoksissa testisuureen $t_A(X)$ jakaumalle saadaan parempi approksimaatio käyttämällä approksimoivana jakaumana *t*-jakaumaa vapausastein (ns. *Satterthwaiten approksimaatio*)

$$\nu = \frac{\left[\dfrac{s_1^2(X)}{n_1} + \dfrac{s_2^2(X)}{n_2}\right]^2}{\dfrac{1}{n_1 - 1}\left[\dfrac{s_1^2(X)}{n_1}\right]^2 + \dfrac{1}{n_2 - 1}\left[\dfrac{s_2^2(X)}{n_2}\right]^2}$$

Jos ν ei ole kokonaisluku, ν:n arvo on tapana pyöristää alaspäin lähimpään kokonaislukuun.

Hylkäysalueen määrääminen kahden riippumattoman otoksen *t*-testissä odotusarvoille

Valitaan testin merkitsevyystasoksi α.

Käsittelemme tässä kriittisten rajojen määräämistä vain, kun testisuuretta t_A approksimoidaan *normaalijakaumalla*. Kriittisten rajojen määrääminen, kun testisuuretta t_A approksimoidaan *t*-jakaumalla, tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

(i) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 > \mu_2 ,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(+t_\alpha, +\infty) .$$

Kriittinen arvo $+t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \geq +t_\alpha) = \alpha ,$$

jossa $t : \mathrm{N}(0,1)$.

(ii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 < \mu_2 ,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(-\infty, -t_\alpha) .$$

Kriittinen arvo $-t_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(t \leq -t_\alpha) = \alpha ,$$

missä $t : \mathrm{N}(0,1)$.

(iii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2 ,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(-\infty, -t_{\alpha/2}) \cup (+t_{\alpha/2}, +\infty) .$$

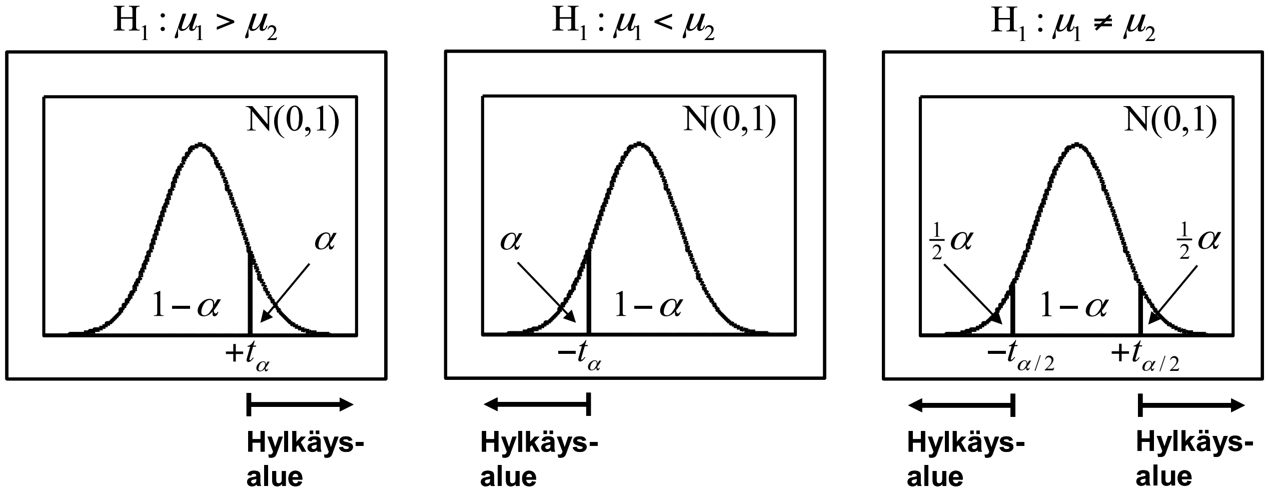
Kriittiset arvot $-t_{\alpha/2}$ ja $+t_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(t \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha / 2$$
$$\Pr(t \geq +t_{\alpha/2}) = \alpha / 2$$

jossa $t : \mathrm{N}(0,1)$.

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *hylkäysalueen* valintaa:

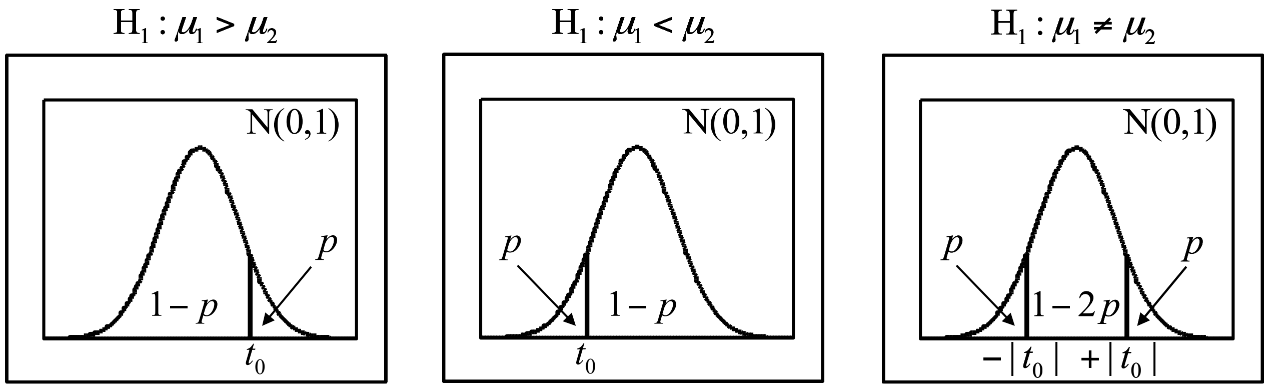


p-arvon määrääminen kahden riippumattoman otoksen t-testissä odotusarvoille

Olkoon testisuureen datajoukosta x laskettu arvo havaittu arvo $t_0 = t_A(x)$

Käsittelemme tässä testin p-arvon määräämistä vain, kun testisuuretta $t_A(X)$ approksimoidaan *normaalijakaumalla*. p-arvon määrääminen, kun testisuuretta t_A approksimoidaan t-jakaumalla, tapahtuu täsmälleen samalla tavalla kuin yhden otoksen t-testin tapauksessa.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin p-arvon määräämistä:



Testin p-arvo $= p$ Testin p-arvo $= p$ Testin p-arvo $= 2p$

Nollahypoteesi hylätään, jos testin p-arvo on pieni.

t-testi parivertailuille

Testausasetelma *t*-testissä parivertailuille

Oletetaan, että havainnot muodostuvat määrällistä muuttujaa koskevista havaintopareista

$$(X_{i1}, X_{i2}),\ i = 1, 2, \dots, n,$$

missä X_{i1} ja X_{i2} voivat riippua toisistaan, mutta jokainen pari on muista pareista riippumaton.

Tavoitteena on verrata mittauksia X_{i1} ja X_{i2} toisiinsa: Antavatko mittaukset 1 ja 2 keskimäärin saman tuloksen?

Muodostetaan mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} erotukset

$$D_i = X_{i1} - X_{i2},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Mittaukset 1 ja 2 antavat keskimäärin saman tuloksen, jos erotukset D_i saavat keskimäärin arvon nolla.

Parivertailuongelman ratkaisuna on tavanomainen *yhden otoksen t-testi* mittaustuloksien X_{i1} ja X_{i2} erotuksien D_i odotusarvolle.

Hypoteesit *t*-testissä parivertailuille

Yleinen hypoteesi H

$$D_1, D_2, \dots, D_n \perp$$
$$D_i \sim \mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2),\ i = 1, 2, \dots, n$$

Nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \mu_D = 0$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{H}_1 : \mu_D > 0 \\ \mathrm{H}_1 : \mu_D < 0\end{array}\right\} \quad \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : \mu_D \neq 0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi *t*-testissä parivertailuille

Olkoot

$$m(D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$$

ja

$$s^2(D) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - m(D))^2$$

tavanomaiset harhattomat estimaattorit normaalijakauman parametreille μ_D ja σ_D^2. Tunnusluku $m(D)$ on erotusten $D_i = X_{i1} - X_{i2},\ i = 1, 2, \dots, n$ *keskiarvo* ja $s^2(D)$ on erotusten $D_i = X_{i1} - X_{i2},\ i = 1, 2, \dots, n$ *otosvarianssi.*

Testisuure *t*-testissä parivertailuille

Määritellään stokastista mallia vastaava testisuure

$$t(D) = \frac{m(D)}{s(D)/\sqrt{n}}.$$

Jos nollahypoteesi H_0 pätee, niin testisuure $t(D)$ noudattaa Studentin t-jakaumaa vapausastein $n - 1$. Testisuureen t normaaliarvo on nolla, koska nollahypoteesin H_0 pätiessä

$$\mathrm{E}(t(D)) = 0.$$

Siten itseisarvoltaan suuret testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 ei päde.

Hylkäysalueen määrääminen *t*-testissä parivertailuille

Kriittisten arvojen määrääminen tapahtuu vastaavalla tavalla kuin yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

***p*-arvon määrääminen *t*-testissä parivertailuille**

Testin *p*-arvon määrääminen tapahtuu vastaavalla tavalla kuin yhden otoksen *t*-testin tapauksessa.

Testi suhteelliselle osuudelle

Tarkastellaan seuraavaksi laadullisia binaariarvoisia muuttujia.

Testausasetelma testissä suhteelliselle osuudelle

Olkoon A perusjoukon S tapahtuma ja olkoon

$$\Pr(A) = p$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p = q$$

Määritellään satunnaismuuttuja

$$X = \begin{cases} 1, & \text{jos tapahtuma } A \text{ sattuu} \\ 0, & \text{jos tapahtuma } A \text{ ei satu} \end{cases}$$

Tällöin satunnaismuuttuja X noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* parametrinaan p:

$$X \sim \mathrm{Ber}(p)$$

ja

$$\mathrm{E}(X) = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{D}^2(X) = pq$$

Oletetaan, että tapahtuma A on muotoa

A = ”Perusjoukon S alkiolla on ominaisuus P”

Tällöin

$$p = \Pr(A)$$

on todennäköisyys poimia perusjoukosta S satunnaisesti alkio, jolla on ominaisuus P. Jos perusjoukko S on *äärellinen*, niin todennäköisyys p kuvaa niiden perusjoukon S alkioiden *suhteellista osuutta*, joilla on ominaisuus P.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satunnaisotos perusjoukosta S, joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* Bernoulli(p). Tällöin

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$
$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Asetetaan Bernoulli-jakauman odotusarvoparametrille p nollahypoteesi

$$\text{H}_0 : p = p_0\ .$$

Testausongelma: Ovatko havainnot sopusoinnussa nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *testi suhteelliselle osuudelle*.

Hypoteesit testissä suhteelliselle osuudelle

Yleinen hypoteesi

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$
$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Nollahypoteesi

$$\text{H}_0 : p = p_0$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit

$$\left.\begin{aligned} \text{H}_1 &: p > p_0 \\ \text{H}_1 &: p < p_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\text{H}_1 : p \neq p_0 \quad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi testissä suhteelliselle osuudelle

Olkoon

$$\hat{p}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

tavanomainen harhaton estimaattori Bernoulli-jakauman parametrille p. Huomaa, että

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = f(X)$$

on tapahtuman A *frekvenssi* siinä n-kertaisessa riippumattomien Bernoulli-kokeiden sarjassa, jota yksinkertaisen satunnaisotoksen poiminta Bernoulli-jakaumasta Bernoulli(p) merkitsee. Siten

$$\hat{p}(X) = \frac{f(X)}{n}$$

on tapahtuman A *suhteellinen frekvenssi* ja

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(n, p).$$

Testisuure testissä suhteelliselle osuudelle

Määritellään tilastokokeen stokastista mallia vastaava testisuure

$$z(X) = \frac{\hat{p}(X) - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}.$$

Jos nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0$$

pätee, niin testisuure $z(X)$ noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa N(0,1):

$$z(X) \sim_a \mathrm{N}(0,1).$$

Testisuureen z normaaliarvo on nolla, koska nollahypoteesin H_0 pätiessä

$$\mathrm{E}(z(X)) = 0.$$

Siten itseisarvoltaan suuret testisuureen arvot viittaavat siihen, että nollahypoteesi H_0 ei päde.

Hylkäysalueen määrääminen testissä suhteelliselle osuudelle

Valitaan testin merkitsevyystasoksi α.

(i) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : p > p_0,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(+z_\alpha, +\infty).$$

Kriittinen arvo $+z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \geq +z_\alpha) = \alpha,$$

jossa $z : \ \mathrm{N}(0,1)$.

(ii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : p < p_0,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(-\infty, -z_\alpha).$$

Kriittinen arvo $-z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \leq -z_\alpha) = \alpha,$$

jossa $z : \ \mathrm{N}(0,1)$.

(iii) Jos vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : p \neq p_0,$$

niin testin hylkäysalue on muotoa

$$(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty).$$

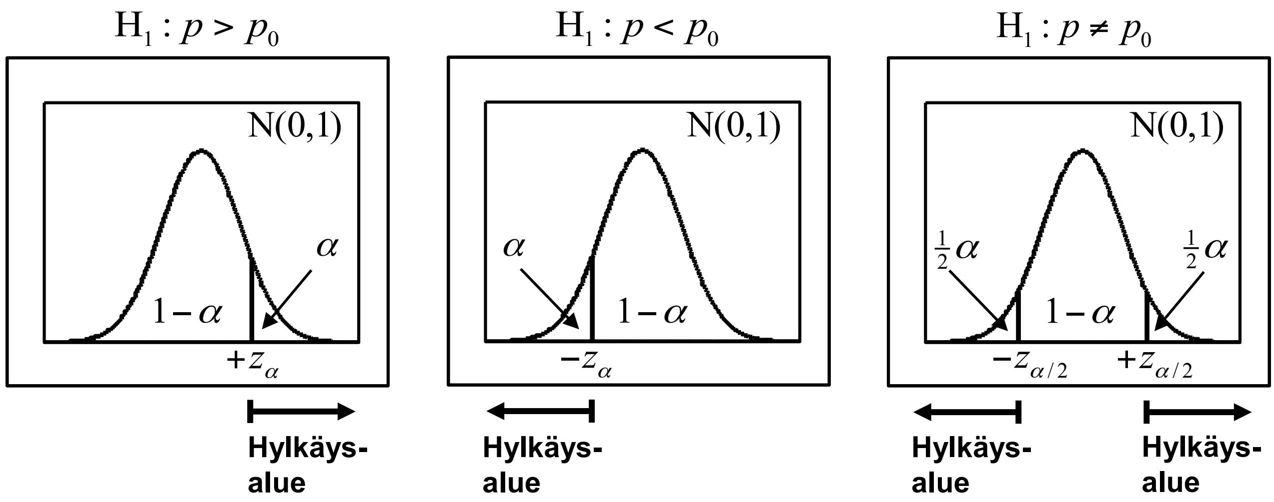
Kriittiset arvot $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(z \le -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$
$$\Pr(z \ge +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa $z : \mathrm{N}(0,1)$.

Nollahypoteesi hylätään, jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle.

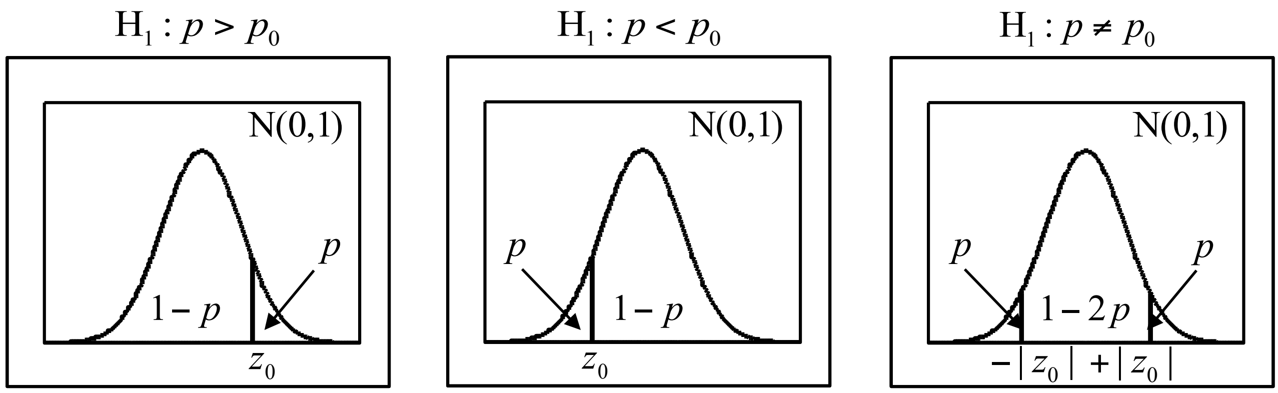
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin hylkäysalueen valintaa:



p-arvon määrääminen testissä suhteelliselle osuudelle

Olkoon testisuureen datajoukosta $x=(x_1,\ldots,x_n)$ laskettu arvo $z_0 = z(x)$.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *p-arvon* määräämistä:



p-arvo $= p$ $\quad$ p-arvo $= p$ $\quad$ p-arvo $= 2p$

Nollahypoteesi hylätään, jos testin p-arvo on pieni.

Suhteellisten osuuksien vertailutesti

Testausasetelma suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Olkoon A perusjoukon S_k , $k = 1, 2$ *tapahtuma* ja olkoot

$$\Pr(A) = p_k \text{ , } k = 1, 2$$

$$\Pr(A^c) = 1 - p_k = q_k \text{ , } k = 1, 2$$

Määritellään satunnaismuuttujat X_k , $k = 1, 2$:

$$X_k = \begin{cases} 1, \text{ jos } A \text{ tapahtuu perusjoukossa } S_k \\ 0, \text{ jos } A \text{ ei tapahdu perusjoukossa } S_k \end{cases}$$

Tällöin

$$X_k \sim \text{Bernoulli}(p_k) \text{ , } k = 1, 2$$

ja

$$\mathrm{E}(X_k) = p_k$$

$$\mathrm{Var}(X_k) = \mathrm{D}^2(X_k) = p_k q_k$$

Oletetaan, että tapahtuma A on muotoa

A = ”Perusjoukon alkiolla on ominaisuus P”

Tällöin

$$p_k = \Pr(A)$$

on todennäköisyys poimia perusjoukosta S_k , $k = 1, 2$ satunnaisesti alkio, jolla on ominaisuus P. Jos perusjoukko S_k , $k = 1, 2$ on *äärellinen*, niin todennäköisyys p_k kuvaa niiden perusjoukon S_k alkioiden *suhteellista osuutta*, joilla on ominaisuus P.

Olkoon

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}$$

satunnaisotos perusjoukosta S_1, joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* Bernoulli(p_1). Tällöin

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1} \perp$$

$$X_{i1} \sim \text{Bernoulli}(p_1) \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n_i$$

Olkoon

$$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}$$

satunnaisotos perusjoukosta S_2, joka noudattaa *Bernoulli-jakaumaa* Bernoulli(p_2). Tällöin

$$X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2} \perp$$

$$X_{i2} \sim \text{Bernoulli}(p_2) \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n_2$$

Olkoot otokset lisäksi toisistaan *riippumattomia*.

Asetetaan Bernoulli-jakaumien *parametreille* p_1 ja p_2 *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = p$$

Testausongelma: Ovatko havainnot *sopusoinnussa* nollahypoteesin H_0 kanssa?

Ongelman ratkaisuna on *suhteellisten osuuksien vertailutesti*.

Hypoteesit suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Yleinen hypoteesi:

$$X_{i1} \sim \text{Bernoulli}(p_1)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n_i$$

$$X_{i2} \sim \text{Bernoulli}(p_2)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n_2$$

$$X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n_1 1}, X_{12}, X_{22}, \ldots, X_{n_2 2}\ \perp$$

Nollahypoteesi:

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = p$$

Vaihtoehtoiset hypoteesit:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}_1 &: p_1 > p_2 \\ \mathrm{H}_1 &: p_1 < p_2 \end{aligned}\right\} \text{ 1-suuntaiset vaihtoehtoiset hypoteesit}$$

$$\mathrm{H}_1 : p_1 \neq p_2 \qquad \text{2-suuntainen vaihtoehtoinen hypoteesi}$$

Parametrien estimointi suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Olkoon

$$\hat{p}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}\,,\ k = 1, 2$$

tavanomainen *harhaton estimaattori* Bernoulli-jakauman parametrille p_k , k =1, 2. Huomaa, että

$$\sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} = f_k\,,\ k = 1, 2$$

on tapahtuman *A frekvenssi* siinä *n*-kertaisessa riippumattomien Bernoulli-kokeiden sarjassa, jota yksinkertaisen satunnaisotoksen poiminta Bernoulli-jakaumasta Bernoulli(p_k) , k = 1, 2 merkitsee. Siten

$$\hat{p}_k = \frac{f_k}{n_k}\,,\ k = 1, 2$$

on tapahtuman *A suhteellinen frekvenssi* otoksessa k = 1, 2 ja

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \sim \text{Bin}(n_k, p_k)$$

Jos *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = p$$

pätee, voidaan otokset *yhdistää* ja parametrin *p harhaton estimaattori* on tapahtuman *A* suhteellinen frekvenssi yhdistetyssä otoksessa:

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2}$$

Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, niin

$$\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p(1-p)}{n_1} + \frac{p(1-p)}{n_2} = p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

Testisuure suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Määritellään *testisuure*

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Jos *nollahypoteesi*

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2 = p$$

pätee, niin *testisuure z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Testisuureen *z normaaliarvo* = 0, koska *nollahypoteesin* H_0 *pätiessä*

$$\mathrm{E}(z) = 0$$

Siten itseisarvoltaan *suuret* testisuureen *z* arvot viittaavat siihen, että *nollahypoteesi* H_0 *ei päde*.

Hylkäysalueen määrääminen suhteellisten osuuksien vertailutestissä

Valitaan testin *merkitsevyystasoksi* α.

(i) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : p_1 > p_2$$

niin testin *hylkäysalue* on muotoa

$$(+z_\alpha, +\infty)k$$

Kriittinen raja tai *arvo* $+z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \geq +z_\alpha) = \alpha$$

jossa $z : \ \mathrm{N}(0,1)$.

(ii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : p_1 < p_2$$

niin testin *hylkäysalue* on muotoa

$$(-\infty, -z_\alpha)$$

Kriittinen raja tai *arvo* $-z_\alpha$ saadaan ehdosta

$$\Pr(z \leq -z_\alpha) = \alpha$$

jossa $z : \ \mathrm{N}(0,1)$.

(iii) Jos *vaihtoehtoinen hypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_1 : p_1 \neq p_2$$

niin testin *hylkäysalue* on muotoa

$$(-\infty, -z_{\alpha/2}) \cup (+z_{\alpha/2}, +\infty)$$

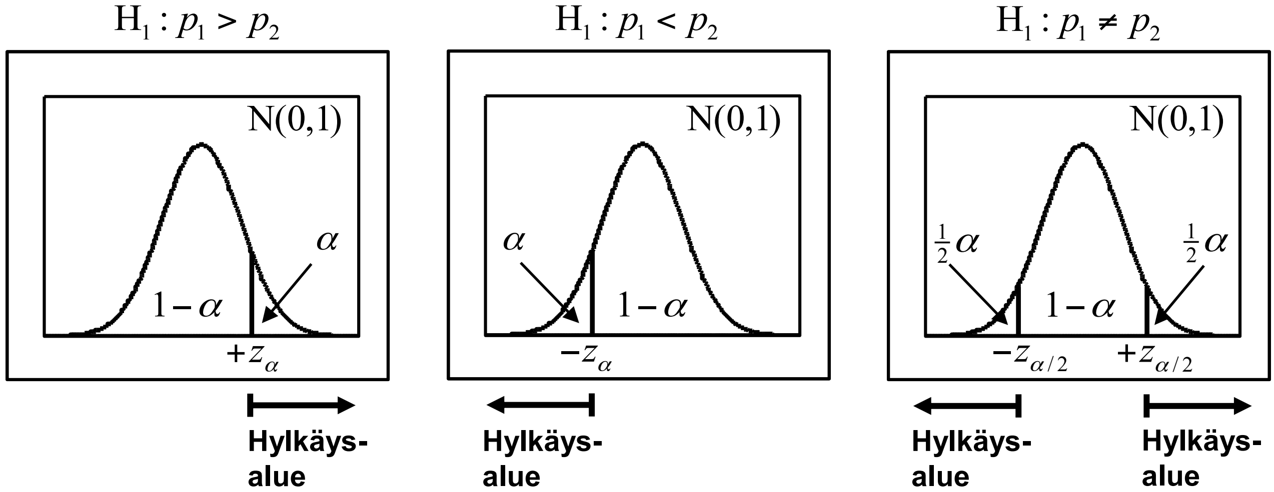
Kriittiset rajat tai *arvot* $-z_{\alpha/2}$ ja $+z_{\alpha/2}$ saadaan ehdoista

$$\Pr(z \le -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$
$$\Pr(z \ge +z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

jossa $z : \mathrm{N}(0,1)$.

Nollahypoteesi *hylätään*, *jos testisuureen arvo osuu hylkäysalueelle*.

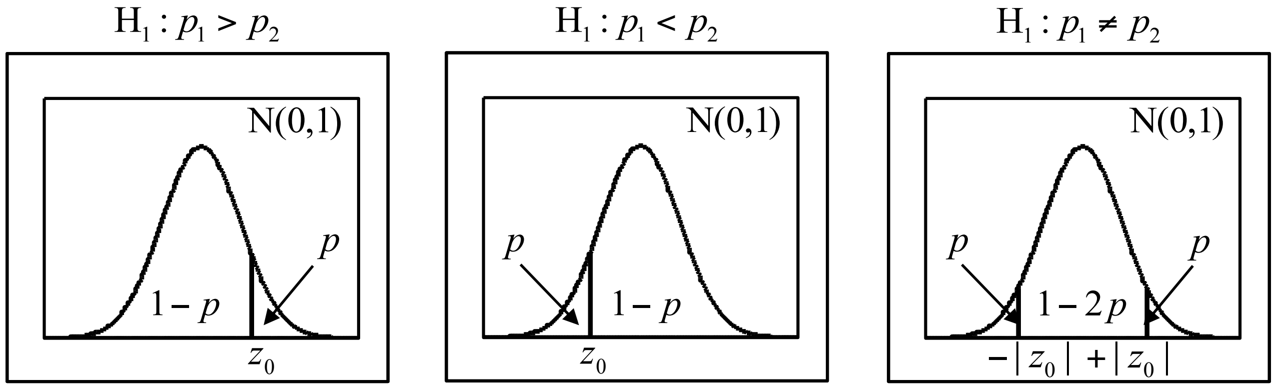
Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *hylkäysalueen* valintaa:



***p*-arvon määrääminen suhteellisten osuuksien vertailutestissä**

Olkoon *z-testisuureen z* havaittu arvo z_0.

Alla olevat kuviot havainnollistavat testin *p-arvon* määräämistä:



p-arvo $= p$ p-arvo $= p$ p-arvo $= 2p$

Nollahypoteesi *hylätään*, *jos testin p-arvo on kyllin pieni*.

Esimerkki 9.1

Kone valmistaa nauloja, joiden tavoitepituutena on 10 cm. Naulojen pituus vaihtelee kuitenkin satunnaisesti noudattaen normaalijakaumaa. Naulojen laatua seurataan siten, että tasatunnein edellisen tunnin aikana valmistettujen naulojen joukosta poimitaan yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko on 30 ja otokseen poimittujen naulojen keskipituutta verrataan tavoitearvoon.

Eräässä otoksessa naulojen pituuksien keskiarvoksi saatiin 9.95 cm ja otosvarianssiksi 0.01 cm^2. Testaa nollahypoteesia, että ko. tunnin aikana valmistettujen naulojen todellinen keskipituus on tavoitearvon mukainen, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että keskipituus on tavoitearvoa pienempi. Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

Esimerkki 9.1 – Mitä opimme?

Esimerkissä 9.1 testataan normaalijakautuneeksi oletetun määrällisen muuttujan (tuntemattomasta) odotusarvosta tehtyä hypoteesiä soveltaen yhden otoksen *t*-testiä.

Esimerkki 9.1 – Ratkaisu

Koneen valmistamien naulojen joukosta poimitaan yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n = 30$. Määritellään satunnaismuuttujat

X_i = naulan i pituus otoksessa, $i = 1, 2, \ldots , 30$.

Yleinen stokastista mallia koskeva *pohjahypoteesi* H on muotoa:

$$X_1, X_2, \cdots, X_{30} \perp$$
$$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)\,,\ i = 1,2,\ldots,30$$

Pohjahypoteesin voimassaoloa ei testata tässä testissä, vaan sen oletetaan olevan voimassa muiden jo tehtyjen testien perusteella.

Nollahypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 10.$$

Vaihtoehtoinen hypoteesi on muotoa:

$$\mathrm{H}_1 : \mu < 10.$$

Sovelletaan yhden otoksen *t*-testiä. Stokastisen mallin testisuureena on

$$t(X) = \frac{m(X) - \mu_0}{s(X)/\sqrt{n}}\,,$$

missä

$$m(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,,\ s^2(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m(X))^2\,.$$

Jos pohjahypoteesi H ja nollahypoteesi H_0 pätevät, testisuure $t(X)$ noudattaa Studentin *t*-jakaumaa vapausastein n-1=29.

Itseisarvoltaan suuret testisuureen t arvot johtavat nollahypoteesin hylkäämiseen.

Tehtävän tapauksessa

$$n = 30\,,\ m(x) = 9.95\,,\ s^2(x) = 0.01\,,\ \mu_0 = 10\,,$$

joten datasta laskettu testisuureen arvo on

$$t(x) = \frac{m(x) - \mu_0}{s(x)/\sqrt{n}} = \frac{9.95 - 10}{0.1/\sqrt{30}} = -2.739\,.$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on yksisuuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu < 10$, testisuureen $t(x)$ arvoa –2.739 vastaavaksi p-arvoksi saadaan R:llä (komento `pt(-2.739,29)`) tai Excelillä (komento `TDIST(2.739,29,1)`)

$$\Pr(t(X) \leq -2.739) = 0.0052.$$

Siten nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n *merkitsevyystasolla*, koska

$$p = 0.0052 < 0.01.$$

Toisaalta *merkitsevyystasoa* 0.01 vastaava *kriittinen arvo* on

$$-t_{0.01} = -2.462,$$

sillä $t(29)$- jakauman taulukoiden perusteella

$$\Pr(t(X) \leq -2.462) = 0.01.$$

R:llä tämä luku saadaan komennolla `qt(0.01,29)`.

Koska $t(x) < -2.462$, on datasta laskettu testisuureen arvo $t(x) = -2.739$ on osunut hylkäysalueelle ja nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 voidaan hyväksyä.

Johtopäätös:

Kone tekee nauloja, joiden keskimääräinen pituus on tilastollisesti merkitsevästi tavoitearvoa 10 cm pienempi.

Esimerkki 9.2

Kuulalaakeritehtaassa on kaksi kuulalaakerin kuulia valmistavaa konetta, K_1 ja K_2. Koneiden valmistamien kuulien painot vaihtelevat satunnaisesti (ja toisistaan riippumatta) noudattaen normaalijakaumaa.

Kummankin koneen valmistamien kuulien joukosta poimitaan toisistaan riippumattomat yksinkertaiset satunnaisotokset ja otoksista lasketaan kuulien painojen keskiarvot ja otoskeskihajonnat. Otoksista koottu data on annettu alla olevassa taulukossa.

Testaa nollahypoteesia, että koneet K_1 ja K_2 valmistavat keskimäärin samanpainoisia kuulia, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että koneiden K_1 ja K_2 valmistamien kuulien keskipainot eroavat toisistaan. Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

Kone	Keskiarvo (g)	Otoskeskihajonta (g)	Otoskoko
K_1	10.2	0.2	31
K_2	10.1	0.1	20

Esimerkki 9.2 – Mitä opimme?

Esimerkissä 9.2. sovelletaan *kahden riippumattoman otoksen t-testiä.*

Esimerkki 9.2 – Ratkaisu

Tehtaalla valmistetaan kuulalaakerin kuulia kahdella koneella K_1 ja K_2. Koneen K_1 valmistamien kuulien joukosta poimitaan yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n_1 = 31$. Koneen K_2 valmistamien kuulien joukosta poimitaan (edellisestä riippumaton) yksinkertainen satunnaisotos, jonka koko $n_2 = 20$.

Määritellään satunnaismuuttujat

X_{i1} = koneen K_1 tekemän kuulan paino otoksessa $i = 1, 2, \ldots , 31$

X_{j2} = koneen K_2 tekemän kuulan paino otoksessa $j = 1, 2, \ldots , 20$

Yleinen pohjahypoteesi H on muotoa

$X_{i1} : \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ i = 1, 2, \ldots , 31$

$X_{j2} : \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2),\ j = 1, 2, \ldots , 20$

Havainnot X_{i1} ja X_{j2} ovat riippumattomia kaikille i ja j

Nollahypoteesi H_0 on muotoa

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$

Vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 on muotoa

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

Määritellään seuraavat otossuureet:

$$m_k(X) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} \ , k = 1,2$$

$$s_k^2(X) = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - m_k(X))^2 \ , k = 1,2$$

$$s_p^2(X) = \frac{(n_1 - 1)s_1^2(X) + (n_2 - 1)s_2^2(X)}{n_1 + n_2 - 2}$$

Testisuuretta

$$t_A(X) = \frac{m_1(X) - m_2(X)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2(X)}{n_1} + \dfrac{s_2^2(X)}{n_2}}}$$

voidaan käyttää kaikissa testausasetelmissa, joissa yleinen hypoteesi H pätee.

Jos lisäksi nollahypoteesi H_0 pätee, niin testisuure t_A noudattaa suurissa otoksissa likimain standardoitua normaalijakaumaa:

$t_A(X) \sim_a \mathrm{N}(0,1).$

Pienissä otoksissa testisuureen jakaumalle saadaan *parempi approksimaatio* käyttämällä approksimaationa *Studentin t-jakaumaa*, jossa vapausasteiden lukumääränä käytetään lukua

$$\nu = \frac{\left[\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right]^2}{\dfrac{1}{n_1 - 1}\left[\dfrac{s_1^2}{n_1}\right]^2 + \dfrac{1}{n_2 - 1}\left[\dfrac{s_2^2}{n_2}\right]^2}$$

Itseisarvoltaan suuret testisuureen t_A arvot sotivat nollahypoteesia $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$ vastaan.

Tehtävän tapauksessa datasta lasketut tunnusluvut ovat

$$m_1(x) = 10.2, \quad m_2(x) = 10.1,$$
$$s_1^2(x) = 0.04, \quad s_2^2(x) = 0.01,$$
$$n_1 = 31, n_2 = 20,$$

joten datasta laskettu testisuure on

$$t_A(x) = \frac{m_1(x) - m_2(x)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2(x)}{n_1} + \dfrac{s_2^2(x)}{n_2}}} = \frac{10.2 - 10.1}{\sqrt{\dfrac{0.04}{31} + \dfrac{0.01}{20}}} = 2.363.$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on kaksisuuntainen $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, testisuureen t_A arvoa 2.363 vastaavaksi *p-arvoksi* saadaan normaalijakauma-approksimaatiota käyttäen

$$2\ \Pr(Z > 2.363) = 2 \text{ x } (1 - 0.9909) = 0.0182,$$

missä $Z \sim N(0,1)$. Siten nollahypoteesi H_0 jää voimaan 1 %:n merkitsevyystasolla, koska

$$p = 0.0182 > 0.01.$$

Jos käytämme t-jakauma-approksimaatiota, vapausasteiden lukumääräksi tulee

$$\nu = \frac{\left[\dfrac{s_1^2(x)}{n_1} + \dfrac{s_2^2(x)}{n_2}\right]^2}{\dfrac{1}{n_1 - 1}\left[\dfrac{s_1^2(x)}{n_1}\right]^2 + \dfrac{1}{n_2 - 1}\left[\dfrac{s_2^2(x)}{n_2}\right]^2} = 46.69,$$

joten käytämme vapausasteiden lukumääränä alaspäin pyöristettyä lukua 46.

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on kaksisuuntainen $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, *testisuureen t_A arvoa* 2.363 *vastaavaksi p-arvoksi saadaan t-jakauma-approksimaatiota käyttäen* esim. Excelillä

$$2\times\Pr(T > 2.363) = 2\times 0.011 = 0.022,$$

kun $T \sim t(46)$. Siten nollahypoteesi H_0 jää voimaan 1 %:n merkitsevyystasolla, koska

$$p = 0.022 > 0.01.$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 2-suuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, t-jakauman taulukoista saadaan 1 %:n *merkitsevyystasoa vastaaville kriittisille arvoille* $-t_{0.005}$ ja $+t_{0.005}$ arviot

$$-t_{0.005} \in (-2.704, -2.678)$$

$$+t_{0.005} \in (+2.678, +2.704)$$

Koska

$$-2.678 < t_A = 2.363 < +2.678$$

testisuureen t_A arvo 2.363 on osunut hyväksymisalueelle ja *nollahypoteesi* H_0 *jää voimaan* 1 %:n *merkitsevyystasolla*.

Johtopäätös:

Koneiden tekemien kuulien keskimääräiset painot eivät poikkea tilastollisesti merkitsevästi toisistaan. Huomaa kuitenkin, että johtopäätös vaihtuisi päinvastaiseksi, jos testin merkitsevyystasoksi olisi valittu 5 %.

Esimerkki 9.3

Testattaessa erästä verenpainelääkettä samojen potilaiden (8 kpl) verenpaine mitattiin ennen ja jälkeen lääkkeen nauttimisen. Koetulokset (verenpaineet mm/Hg) on esitetty alla olevassa taulukossa.

Testaa hypoteesia, että lääke ei keskimäärin alenna verenpainetta, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että lääke keskimäärin alentaa verenpainetta. Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Jälkeen	128	176	110	149	183	136	118	158
Ennen	134	174	118	152	187	136	125	168

Esimerkki 9.3 – Mitä opimme?

Esimerkissä 9.3. sovelletaan t-testiä parivertailuille.

Huomaa, että tehtävän 9.2. riippumattomien otoksien t-testiä ei saa käyttää, koska verenpainemittaukset ennen ja jälkeen lääkkeen antamisen eivät luultavasti ole riippumattomia: Potilailla, joilla on keskimääräistä korkeampi (matalampi) verenpaine ennen lääkkeen antoa on luultavasti keskimääräistä korkeampi (matalampi) verenpaine myös lääkkeen antamisen jälkeen, vaikka lääke laskisikin verenpainetta; ts. mittaustuloksilla ennen ja jälkeen lääkkeen antamisen on luultavasti selvä positiivinen korrelaatio.

Esimerkki 9.3 – Ratkaisu

Koska verenpainemittaukset ennen ja jälkeen lääkkeen antamisen luultavasti riippuvat toisistaan, tällaisessa *parivertailuasetelmassa* toimitaan seuraavasti: Määrätään havaintoarvojen parikohtaiset *erotukset* ja testataan nollahypoteesia, jonka mukaan *erotukset ovat keskimäärin nollia*.

Olkoot

X_{Ei} = potilaan i verenpaine ennen lääkkeen antamista, $i = 1, 2, \ldots , 8$

X_{Ji} = potilaan i verenpaine ennen lääkkeen antamista, $i = 1, 2, \ldots , 8$

$D_i = X_{Ei} - X_{Ji}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$

Yleinen hypoteesi H on muotoa

$D_i : \ \mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$

Erotukset $D_1, D_2, \ldots, D_8$ ovat riippumattomia

Nollahypoteesi H_0 on muotoa

$\mathrm{E}(D_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Sovelletaan *yhden otoksen t-testiä* mittaustulosten erotuksille. Testisuureena on

$$t(D) = \frac{m(D)}{s(D)/\sqrt{n}},$$

missä

$$m(D) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\,,\ s^2(D) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - m(D))^2.$$

Jos H_0 pätee, testisuure $t(D)$ noudattaa Studentin t-jakaumaa vapausastein $n-1=7$. Tällöin itseisarvoltaan suuret testisuureen arvot johtavat nollahypoteesin hylkäämiseen.

Tehtävän tapauksessa datasta lasketut tunnusluvut ovat

$$n = 8\,,\ m(d) = 4.5\,,\ s^2(d) = 16.6.$$

Siten datasta laskettu testisuureen arvo on

$$t(d) = \frac{m(d)}{s(d)/\sqrt{n}} = \frac{4.5}{4.07/\sqrt{8}} = 3.13.$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on yksisuuntainen vaihtoehto $H_1 : \mu_D > 0$, testisuureen t arvoa 3.13 vastaavaksi *p-arvoksi* saadaan esim. Excel -ohjelmalla

$\Pr(T > 3.13) = 0.0083$,

missä $T \sim t(7)$. Siten nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä merkitsevyystasolla 0.01, koska

$p = 0.0083 < 0.01$.

Toisaalta merkitsevyystasoa 0.01 vastaava kriittinen arvo on

$+t_{0.01} = 2.998$,

sillä t-jakauman taulukoiden mukaan

$\Pr(T \geq 2.998) = 0.01$,

kun $T \sim t(7)$. Koska

$t(d) = 3.13 > 2.998$,

nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 hyväksyä.

Johtopäätös:

Lääkkeellä on tilastollisesti merkitsevästi keskimääräistä verenpainetta alentava vaikutus.

Esimerkki 9.4

Tuotteen valmistaja väittää, että sen tuotteista korkeintaan 5 % on viallisia. Asiakas poimii sille toimitettujen tuotteiden joukosta otoksen, jonka koko on 200 ja löytää 19 viallista tuotetta. Onko valmistajan väite oikeutettu?

Testaa nollahypoteesia, että valmistajan väite on oikeutettu, kun vaihtoehtoisena hypoteesina on, että viallisten suhteellinen osuus on suurempi kuin valmistajan väittämä 5 %. Käytä testissä 1 %:n merkitsevyystasoa.

Esimerkki 9.4 – Mitä opimme?

Esimerkissä 9.4 sovelletaan testiä suhteelliselle osuudelle.

Esimerkki 9.4 – Ratkaisu

Tuotteen valmistaja väittää, että sen tuotteista korkeintaan 5 % on viallisia. Asiakas poimii sille toimitettujen tuotteiden joukosta otoksen, jonka koko on 200 ja löytää 19 viallista tuotetta. Onko valmistajan väite oikeutettu?

Olkoon

A = ”Tuote on viallinen”

Tuotteen valmistajan mukaan

$$\Pr(A) = p = 0.05$$

Määritellään riippumattomat satunnaismuuttujat

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ jos } i. \text{ tarkastettu tuote on viallinen} \\ 0, \text{ jos } i. \text{ tarkastettu tuote ei ole viallinen} \end{cases}$$

Tällöin

$$X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$$

Asetetaan nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0 = 0.05.$$

Määritellään testisuure

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

jossa

n = Tarkastettavaksi poimittujen tuotteiden lukumäärä

$\hat{p}$ = Viallisten tuotteiden *suhteellinen osuus* tarkastettujen joukossa

Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, *testisuure z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a \mathrm{N}(0,1)$$

Tehtävässä datasta lasketut tunnusluvut ovat

$$n = 200\,,\ \hat{p}(x) = 19/200 = 0.095.$$

joten datasta laskettu testisuureen arvo on

$$z(x) = \frac{\hat{p}(x) - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.095 - 0.05}{\sqrt{\dfrac{0.05(1-0.05)}{200}}} = 2.91.$$

Koska vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $\mathrm{H}_1 : p > 0.05$, testisuureen arvoa 2.91 vastaavaksi *p-arvoksi* saadaan normaalijakauman taulukoista

$$\Pr(z > 2.91) = 0.0018.$$

Siten havainnot sisältävät voimakasta evidenssiä nollahypoteesia H_0 vastaan; nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla.

Toisaalta merkitsevyystasoa 0.01 vastaava kriittinen arvo on

$$+z_{0.01} = +2.33,$$

sillä normaalijakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(z \geq 2.33) = 0.01.$$

Koska

$$z = 2.91 > 2.33,$$

testisuureen arvo 2.91 on osunut hylkäysalueelle ja nollahypoteesi H_0 voidaan hylätä 1 %:n merkitsevyystasolla ja vaihtoehtoinen hypoteesi H_1 voidaan hyväksyä.

Johtopäätös:

Viallisten suhteellinen osuus on tilastollisesti merkitsevästi valmistajan ilmoittamaa arvoa suurempi.

Esimerkki 9.5

600 erääseen vakavaan tautiin sairastunutta potilasta jaettiin satunnaisesti kahteen ryhmään A ja B, joissa kummassakin oli 300 potilasta. Ryhmälle A annettiin tautiin kehitettyä uutta lääkettä ja ryhmälle B paljon käytettyä vanhaa lääkettä.

(a) Ryhmässä A taudista parani 195 potilasta ja ryhmässä B 225 potilasta. Suosittelisitko uuden lääkkeen ottamista käyttöön koetuloksen perusteella?

(b) Ryhmässä A taudista parani 225 potilasta ja ryhmässä B 195 potilasta. Suosittelisitko uuden lääkkeen ottamista käyttöön koetuloksen perusteella?

Esimerkki 9.5 – Mitä opimme?

Esimerkissä 9.5 sovelletaan suhteellisten osuuksien vertailutestiä riippumattomille otoksille.

Esimerkki 9.5 – Ratkaisu

600 erääseen vakavaan tautiin sairastunutta potilasta jaettiin satunnaisesti kahteen ryhmään A ja B, joissa kummassakin oli 300 potilasta. Ryhmälle A annettiin uutta lääkettä ja ryhmälle B vanhaa lääkettä.

(a) Ryhmässä A taudista parani 195 potilasta ja ryhmässä B 225 potilasta.

Jos uusi lääke parantaa *vähemmän* potilaita kuin vanha lääke, *ei tilastollista testausta tarvita* sen johtopäätöksen tekemiseksi, että uutta lääkettä ei kannata ottaa käyttöön ainakaan tästä kokeesta saadun evidenssin perusteella.

Sen sijaan, jos uusi lääke parantaa *enemmän* potilaita kuin vanha lääke, on testaus tarpeen, jotta saadaan selville onko parantuneiden määrän lisääntymistä pidettävä sattumanvaraisena eli otosvaihtelusta johtuvana vai ei.

(b) Ryhmässä A taudista parani 300 potilaasta 225 ja ryhmässä B parani 300 potilaasta 195.

Olkoon

A = ”Potilas paranee”

ja

$\Pr(A) = p_1$, jos potilas kuuluu ryhmään A

$\Pr(A) = p_2$, jos potilas kuuluu ryhmään B

Määritellään riippumattomat satunnaismuuttujat

$$X_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{jos } i.\text{ potilas paranee ryhmässä } k \\ 0, & \text{jos } i.\text{ potilas ei parane ryhmässä } k \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n_k\,, \; k = 1, 2$$

jossa

$k = 1 \leftrightarrow$ ryhmä A

$k = 2 \leftrightarrow$ ryhmä B

Tällöin

$X_{ik} \sim \mathrm{Ber}(p_k)$, $k = 1, 2$

Asetetaan *nollahypoteesi*

$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2$

Määritellään *testisuure*

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

Testisuureen lausekkeessa

n_1 = Potilaiden *lukumäärä* ryhmässä A

$\hat{p}_1$ = Parantuneiden *suhteellinen osuus* ryhmässä A

n_2 = Potilaiden *lukumäärä* ryhmässä B

$\hat{p}_2$ = Parantuneiden *suhteellinen osuus* ryhmässä B

ja

$\hat{p}$ = Parantuneiden *suhteellinen osuus* kaikkien potilaiden joukossa

Huomaa, että

$$\hat{p}_1 = f_1 / n_1$$

$$\hat{p}_2 = f_2 / n_2$$

jossa

f_1 = Parantuneiden *lukumäärä* ryhmässä A

f_2 = Parantuneiden *lukumäärä* ryhmässä B

ja

$$\hat{p} = \frac{f_1 + f_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Jos *nollahypoteesi* H_0 *pätee*, *testisuure z noudattaa suurissa otoksissa approksimatiivisesti standardoitua normaalijakaumaa*:

$$z \sim_a N(0,1)$$

Tehtävässä

$$n_1 = 300\,,\ \hat{p}_1 = 225/300 = 0.75$$
$$n_2 = 300\,,\ \hat{p}_2 = 195/300 = 0.65$$

joten

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{225+195}{300+300} = 0.7$$

Siten

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.75 - 0.65}{\sqrt{0.7(1-0.7)\left(\dfrac{1}{300} + \dfrac{1}{300}\right)}} = 2.67$$

Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : p_1 > p_2$, *testisuureen z arvoa* 2.67 *vastaavaksi p-arvoksi* saadaan normaalijakauman taulukoista

$$\Pr(z > 2.67) = 0.0038$$

Siten aineisto sisältää voimakasta evidenssiä nollahypoteesia H_0 vastaan; *nollahypoteesi* H_0 *voidaan hylätä* 1 %:n *merkitsevyystasolla*.

Jos vaihtoehtoisena hypoteesina on 1-suuntainen vaihtoehto $H_1 : p_1 > p_2$, *merkitsevyys-tasoa* 0.01 *vastaava kriittinen arvo* on

$$+z_{0.01} = +2.32$$

sillä normaalijakauman taulukoiden mukaan

$$\Pr(z \geq 2.33) = 0.01$$

Koska

$$z = 2.67 > 2.33$$

testisuureen z arvo on osunut hylkäysalueelle ja nollahypoteesi H_0 *voidaan hylätä* 1 %:n *merkitsevyystasolla* ja *vaihtoehtoinen hypoteesi* H_1 *voidaan hyväksyä*.

Johtopäätös:

Uuden lääkkeen käyttöönotto on (b)-kohdan tapauksessa perusteltua, koska parantuneiden suhteellinen osuus on uutta lääkettä saaneiden joukossa tilastollisesti merkitsevästi vanhaa lääkettä saaneiden osuutta suurempi.

Huomautuksia tilastollisesta testauksesta:

(1) Testin tulos eli se, hylätäänkö testin nollahypoteesi vai jätetäänkö se voimaan, riippuu sekä valitusta merkitsevyystasosta että vaihtoehtoisen hypoteesin muodosta.

(2) Käytännön tutkimuksessa apunasi ei ole luennoitsijaa, joka antaisi sinulle nollahypoteesin ja vaihtoehtoisen hypoteesin muodon ja testissä käytettävän merkitsevyystason.

(3) Tilasto-ohjelmistot tulostavat nykyään tavallisesti testisuureen arvon ja sitä vastaavan ***p*-arvon** (tai testisuureen arvoa vastaavan ns. *häntätodennäköisyyden*). Tällöin tutkijan on päätettävä testin p-arvon (tai häntätodennäköisyyden) perusteella hylätäkö nollahypoteesi vai ei.

(4) Merkitsevyystason valinta tai nollahypoteesin hylkäämiseen johtavan kynnysarvon valinta p-arvolle ovat valintoja, joihin on annettava vaikuttaa myös sen, mitä *seurauksia* on nollahypoteesin hylkäämisestä ja mitä nollahypoteesin jäämisestä voimaan.