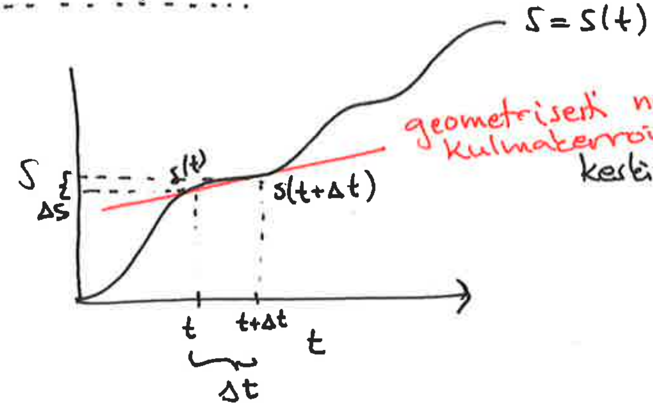
Differentiaali- ja integraalilaskentaa fysiikassa

Mitä on nopeus?



geometrisesti nopeus on kulmakerroin

keskimääräinen nopeus

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{t+\Delta t - t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

Hetkellinen nopeus

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

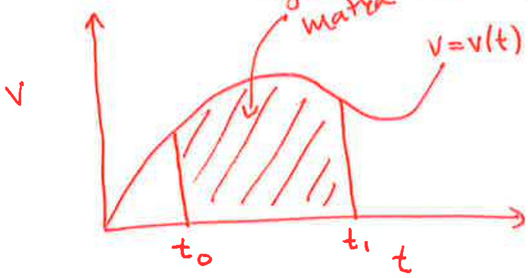
$$= \boxed{\frac{ds(t)}{dt} = v(t)}$$

Nopeus on paikan 1. aikaderivaatta.

Voimme siis ratkaista (derivoimalla) kappaleen nopeuden jos tiedämme sen paikan ajan funktiona.

Entäpä ne integraalit?

geometrisesti kuljettu matka on pinta-ala (t,v)-tasossa



$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} v(t')\,dt' = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{ds(t')}{dt'}\,dt'}_{} \quad \left(\begin{array}{l}\text{integraali on} \\ \text{"antiderivaatta"}\end{array}\right)$$

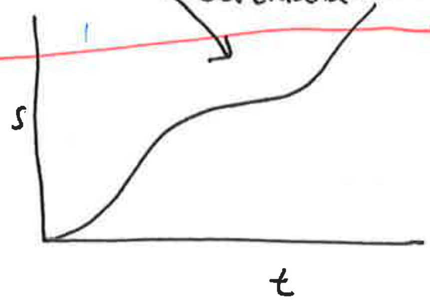
$$\Big/_{t_0}^{t_1} s(t') = s(t_1) - s(t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t')\,dt'}$$

Vastaavasti kiihtyvyys:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$

geometrisesti 2. derivaatta kuvaa käyrän kaarevuutta $s = s(t)$



ja toisaalta

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')\,dt'$$

(täällä valittu alkuajanhetkeksi $t_0 = 0$)

ja edelleen

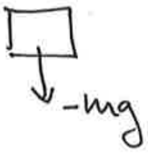
$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$= s(0) + \int_0^t \left[v(0) + \int_0^{t'} a(t'')\,dt''\right] dt'$$

$$= s(0) + t \cdot v(0) + \int_0^t \left[\int_0^{t'} a(t'')\,dt''\right] dt'.$$

Näitä EI PIDÄ MUISTAA vaan ymmärtää.

Vapaa pudotus:



Newton II:

$$F = -mg = m\underbrace{a}_{\frac{dv(t)}{dt}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv(t)}{dt} = -g$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_0^t \frac{dv(t)}{dt'}\,dt'}_{v(t)-v(0)} = -\int_0^t g\,dt' = -gt.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v(t) = v(0) - gt}.$$

jatkuu....

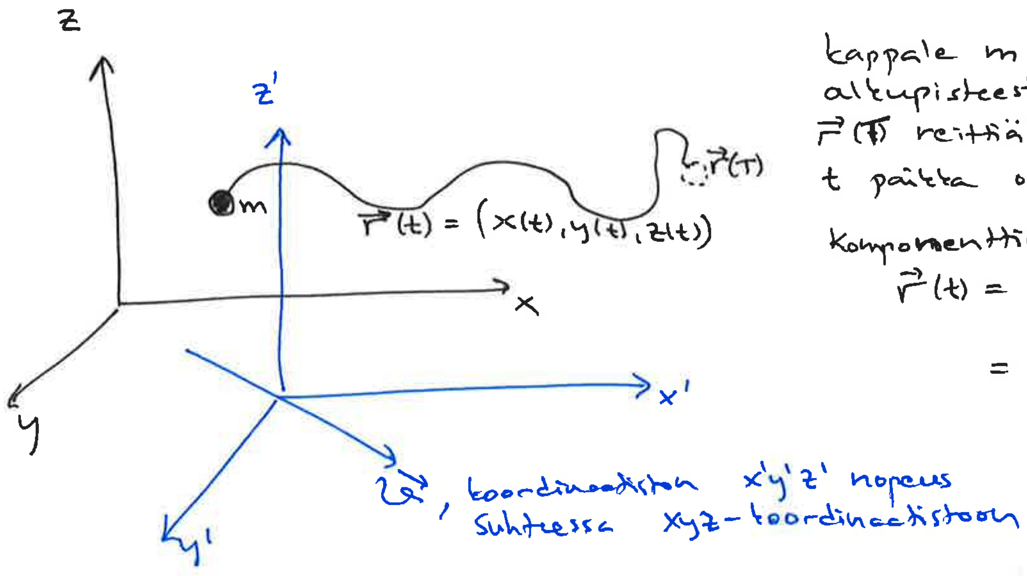
$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t) = v(0) - gt.$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_0^t \frac{ds(t')}{dt'}\,dt'}_{s(t)-s(0)} = \int_0^t [v(0) - gt']\,dt' = v(0)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{s(t) = s(0) + v(0)\cdot t - \frac{1}{2}gt^2}$$

Nämä ovat toivottavasti lukiosta tuttuja.

Galilein muunnos (inertiaalikoordinaatistosta toiseen)



kappale m kulkee alkupisteestä $\vec{r}(0)$ päätepisteeseen $\vec{r}(T)$ reittiä, jossa ajanhetkellä t paikka on $\vec{r}(t)$.

Komponenttiesityksessä

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$= x(t)\cdot\hat{x} + y(t)\cdot\hat{y} + z(t)\cdot\hat{z}$$

yksikkövektoreita

Alkuperäisen xyz-koordinaatiston sijaan voimme tarkastella samaa kappaleen rataa vakionopeudella $\vec{v}$ kulkevassa x'y'z'-koordinaatistossa.

Kappaleen paikka saadaan Galilein muunnoksesta

$$\boxed{\vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \underbrace{\vec{v}t}}$$

paikka x'y'z'-koordinaatistossa

paikka xyz-koordinaatistossa

koordinaatiston x'y'z' siirtymämatka (oletus: ajanhetkellä t=0 koordinaatistot samassa paikassa, eli origot samat)

Huomaamme, että

- nopeuksille pätee $\vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}\,'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{r}(t) - \vec{v}t) = \vec{v}(t) - \vec{v}$

nopeus x'y'z' koordinaatistossa

nopeus xyz koordinaatistossa

- kiihtyvyyksille pätee $\vec{a}\,'(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) - \vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \vec{a}(t)$

→ eli kiihtyvyydet samat

Newtonin II lain perusteella molemmissa koordinaatistoissa vallitsevat samat voimat.

- huomaa vielä, että aika on sama molemmissa koordinaatistoissa

Entäpä jos x'y'z' koordinaatiston nopeus kiihtyy?

Oletetaan vakiokiihtyvyys $\vec{\alpha}$.

x'y'z:n siirtymä ajanhetkellä t on: $\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2$

alkunopeus   kiihtyvyys

jälleen oletus: $t=0 \rightarrow$ ~~koorigot~~ origot samassa paikassa

Galilein muunnos on nyt

$$\underbrace{\vec{r}\,'(t)}_{\substack{\text{tappaleen paikka}\\ \text{x'y'z'-koordinaatistossa}}} = \underbrace{\vec{r}(t)}_{\substack{\text{tappaleen paikka}\\ \text{xyz-koordinaatistossa}}} - \underbrace{\vec{v}_0 t - \frac{1}{2}\vec{\alpha} t^2}_{\text{koordinaatiston x'y'z' siirtymä}}$$

Nopeudet: $\vec{V}\,'(t) = \vec{V}(t) - \vec{v}_0 - \vec{\alpha} t$

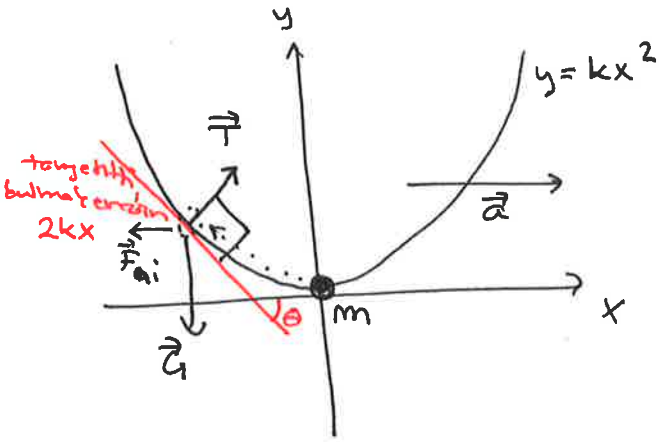
Kiihtyvyydet: $\vec{a}\,'(t) = \vec{a}(t) - \vec{\alpha}$.

Newtonin II laki:

$$\underbrace{\sum \vec{F}'(t)}_{\substack{\text{voimat x'y'z'-}\\ \text{koordinaatistossa}}} = m\vec{a}\,'(t) = \underbrace{m\vec{a}(t)}_{\sum \vec{F}(t)} - m\vec{\alpha} = \underbrace{\sum \vec{F}(t)}_{\substack{\text{voimat xyz-}\\ \text{koordinaatistossa}}} \underbrace{- m\vec{\alpha}}_{\substack{\text{näennäisvoima, joka aiheutuu}\\ \text{koordinaatiston x'y'z' kiihtyvyydestä } \vec{\alpha}.}}$$

Koordinaatiston kiihtyvyys (epäinertiaalisuus) aiheuttaa näennäisvoiman. Näennäisvoimat ovat aina verrannollisia massaan (vrt. gravitaatio).

Kiihtyvyysanturi



Tarkastellaan tilannetta paraabelivaijerin mukana liikkuvassa <u>kiihtyvässä</u> koordinaatistossa.

Helmeen vaikuttavat voimat:

Gravitaatio $\vec{G} = -mg\hat{y}$

Tukivoima $\vec{T}$ (kohtisuorassa vaijeria vastaan)

Näennäisvoima $\vec{F}_{ni} = -m\vec{a}$

"non-inertial" — koordinaatiston kiihtyvyys.

Järjestelmä aluksi levossa joten helmi luultavasti päätyy oskilloimaan (enemmän tai vähemmän harmonisesti!) jonkin tasapaino-aseman ympärille. Oletetaan vähäinen kitka jolloin oskillointi aikanaan lakkaa ja helmi päätyy tasapainoasemaan.

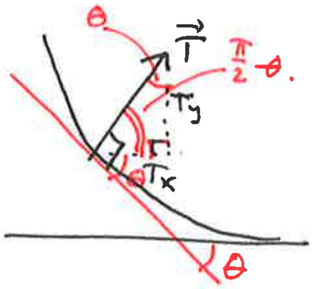
Ratkaistaan siis helmen koordinaatti x, kun voimat kumoavat toisensa:

<u>NII</u>: $\vec{G} + \vec{T} + \vec{F}_{ni} = 0$

$$\begin{cases} x: & T_x - ma = 0 \\ y: & -mg + T_y = 0. \end{cases}$$

;

$$T_x = T\cdot\sin\theta$$
$$T_y = T\cdot\cos\theta$$



$$\tan\theta = 2\cdot kx$$

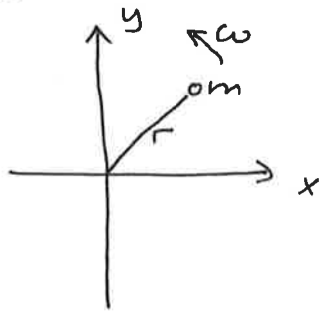
↑ paraabelin $y = kx^2$ derivaatta.

$$\Rightarrow \begin{cases} T\cdot\sin\theta = ma \\ T\cdot\cos\theta = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow 2kx = \frac{a}{g} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2kg}}$$

Pyörivä koordinaatisto

Tapaus 1: keskipakovoima

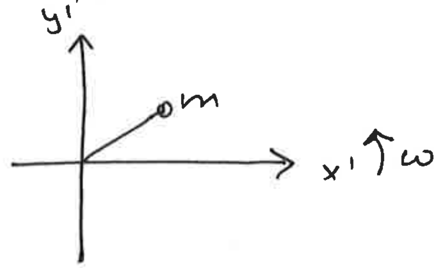


kappale (massa m) pyörii langan (pituus r) varassa kulmanopeudella ω origon ympäri.

Lanka kohdistaa kappaleeseen keskihakuvoiman, jonka suuruus on

$$|F_{keskihaku}| = mr\omega^2.$$

Siirrytään kulmanopeudella ω pyörivään koordinaatistoon

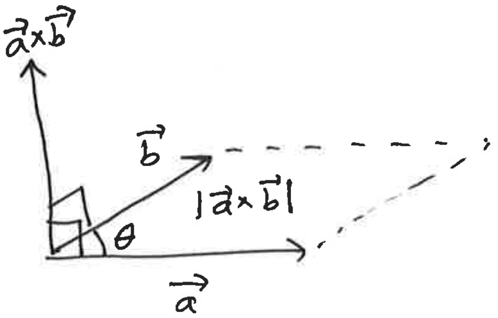


kappale paikallaan. Lanka edelleen kohdistaa voiman $mr\omega^2$ (fysiikka ei muutu, jos lanka on jännittynyt niin se on jännittynyt kaikissa koordinaatistoissa)

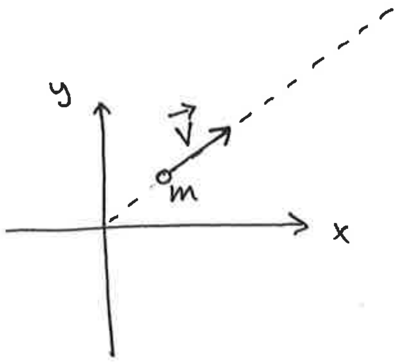
koska kappaleella ei kiihtyvyyttä, on oltava voima joka kumoaa keskihaku voiman ⟹ keskipakovoima

$$\boxed{\vec{F}_{keskipako} = -m\,\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})}$$

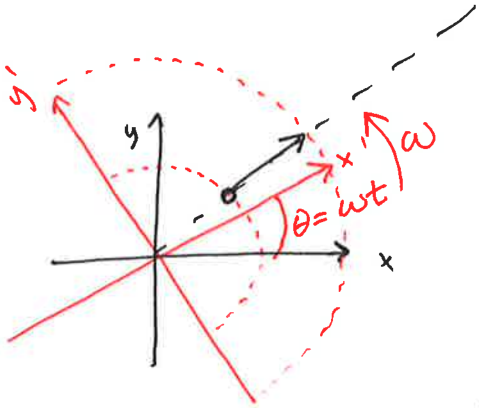
Ristitulo:



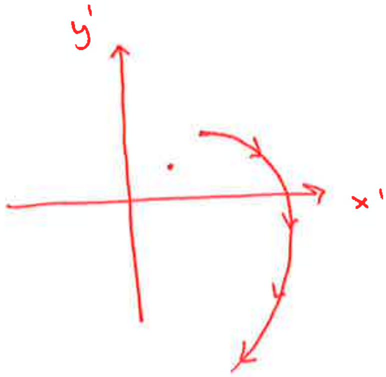
Tapaus 2: Coriolisvoima



kappale liikkuu vakionopeudella $\vec{v}$ poispäin origosta $\Rightarrow$ ei voimia.



mitä näyttää kappaleen rata kulmanopeudella ω pyörivästä koordinaatistosta katsoen?

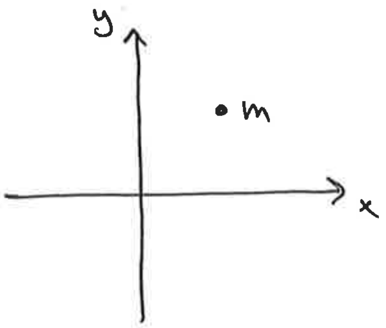


Näyttää siltä, että olisi kiihtyvyyttä kappaleen kulkusuuntaan nähden oikealle $\rightarrow$ ~~virtuaalinen~~ näennäisvoima.

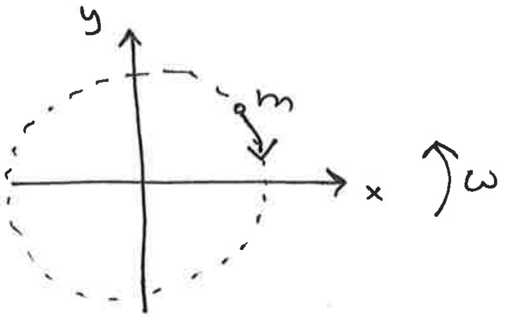
$$\boxed{\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}_r}$$

nopeusvektori pyörivässä koordinaatistossa

Tapaus 3: keskipakovoima + Coriolisvoima



paikallaan oleva kappale.
miltä näyttää pyörivässä koordinaatistossa?



pyörii myötäpäivään kulmanopeudella $-\omega$.
$\Rightarrow$ tarvitaan keskihakuvoima

$$\left|\sum F_r\right| = m\omega^2 r.$$

- ei ulkoisia voimia
- keskipakovoima $\quad -m\vec{\Omega}\times(\underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{r}}_{\omega\hat{e}_z\times\vec{r}})$, $\quad \vec{\Omega} = \omega\hat{e}_z$

$$\omega\hat{e}_z\times\vec{r} = \omega r\,\underbrace{\hat{e}_\perp(t)}_{\text{vektori kohtisuorassa sädettä vastaan "e ortho"}}$$

$$= +m\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

- Coriolisvoima $\quad -2m\vec{\Omega}\times\underbrace{\vec{v}_r}_{-\omega r\hat{e}_\perp(t)}$

$$= -2m\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

$\Rightarrow$ Kokonaisvoima

$$\sum\vec{F}_r = -m\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

Suunta $-\hat{r}(t)$, eli kohti origoa.

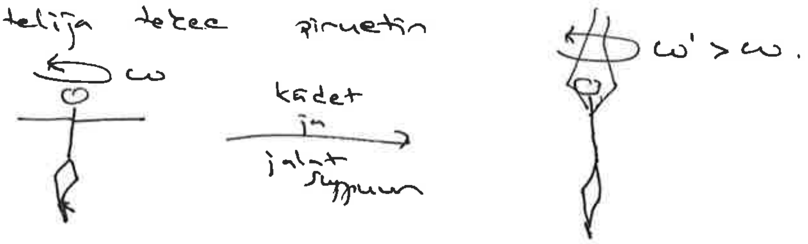
Tapaus 4: Euleri voima

Jos pyörivän koordinaatiston <u>kiertonopeus muuttuu</u>,
saamme vielä yhden näennäisvoiman ns.
Eulerin voiman

$$\boxed{\vec{F}_{Euler} = -m\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}\times\vec{r}}$$

Pyörimismäärän säilyminen ja Coriolis voima

Luistelija tekee piruetin



pyörimisnopeus ω kasvaa kun hitausmomentti pienenee.

$$|\vec{L}| = I\omega$$

↑ hitausmomentti

$I \propto m, r.$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{p} = m\vec{v}$ ← ympyräradalle $|\vec{v}| = \omega r$.

↑ kulmanopeus

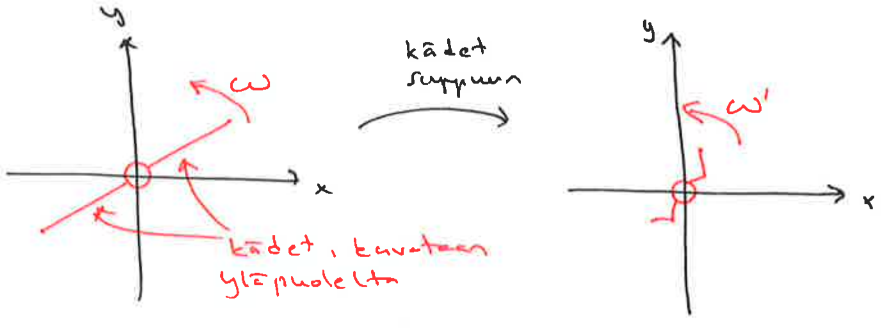
$\Rightarrow |\vec{L}| = m\omega r^2$

↑ ympyräradalle, pistemäisen kappale (massa m) kiertää kulmanopeudella ω säteellä r.

Jos kappale on monimutkaisempi kuin pistemäinen tai rata ei ole ympyrärata muuttuu tulos mutta lopputulema on että kokonaispyörimismäärä säilyy. jos kappaleeseen ei kohdistu vääntömomentteja..

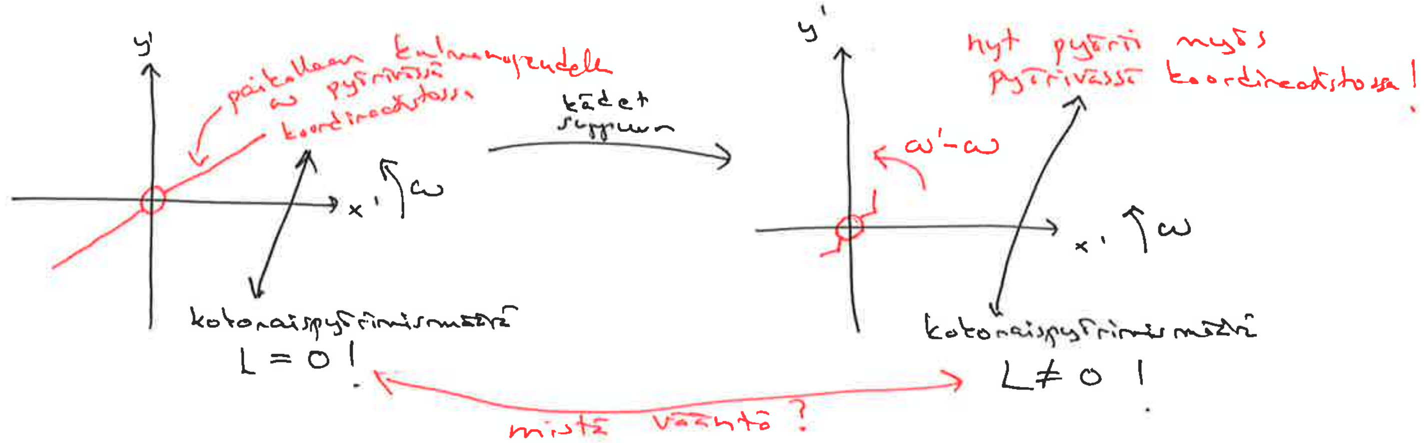
Tarkastellaan luistelijaa pyörivässä koordinaatistossa

inertiaalikoordinaatisto

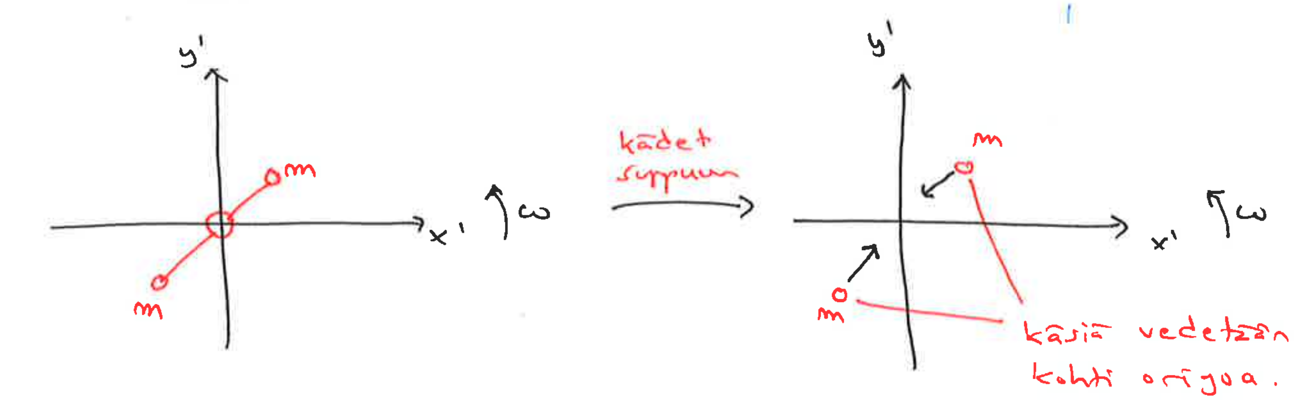


pyörimisnopeus kasvaa, jolloin pyörimismäärä säilyy.
⇒ ei vääntöä.

pyörivä koordinaatisto

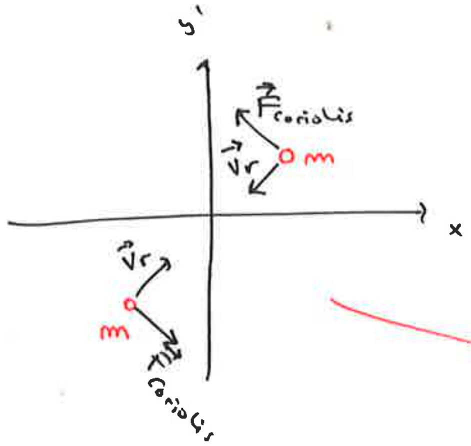


Tarkastellaan käsien liikettä. Kuvataan kädet pistemäisinä massoina m.



⇒ kädet liikkuvat säteittäisesti pyörivässä koordinaatistossa

⇒ niihin kohdistuu Coriolisvoima



$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}_r$$

ylöspäin, $|\vec{\Omega}| = \omega$.

kohti origoa

Coriolis voima toimii vääntömomenttina kiihdyttäen pyörimistä.

Vastaavasti jos kädet levitetään ⇒ liike poispäin origosta

⇒ Coriolis voiman suunta vaihtuu

⇒ pyöriminen hidastuu.

Huomaa vielä, että keskipakovoima on radiaalinen (säteen suuntainen) eikä siksi aiheuta vääntömomenttia.