Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu Alestalo/Moring
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

MS-A0101 Differentiaali- ja integraalilaskenta 1 (TFM)

Kurssitentti ja yleinen tentti 23.10.2019 klo 16.30–19.30.

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukoita. Täytä kaikki otsaketiedot kaikkiin vastauspapereihin.

Kurssitentti: Viisi parasta tehtävää otetaan mukaan arvosteluun.
Yleinen tentti: Laske kaikki kuusi tehtävää.
Jokainen voi halutessaan yrittää kuutta tehtävää, jolloin arvosana määräytyy paremman vaihtoehdon mukaan: ”viisi parasta koetehtävää + laskaripisteet” tai ”pelkät kuusi koetehtävää”.

1. Selitä lyhyesti (ilman perusteluja) seuraavat menetelmät ja anna jokaisessa kohdassa esimerkki tilanteesta, johon menetelmä soveltuu (tarkempia laskuja ei tarvitse esittää):
   a) Sarjoihin liittyvä suhdetesti.
   b) Sarjojen minoranttiperiaate.
   c) Epäoleellisen integraalin majoranttiperiaate.

2. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + \sin x$.
   a) Osoita, että funktio f on aidosti kasvava.
   b) Oletetaan tunnetuksi, että f on myös surjektio, joten sillä on käänteisfunktio. Laske $(f^{-1})'(2\pi)$.
   Vihje: Käänteisfunktiota ei voi esittää alkeisfunktioiden avulla, mutta käänteisfunktion arvo $f^{-1}(2\pi)$ löytyy kokeilemalla (vrt. liitteen taulukko).
   c) Johda käänteisfunktion toiselle derivaatalle kaava
   $$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{\big[f'(f^{-1}(x))\big]^3} = -\frac{f''(y)}{\big[f'(y)\big]^3}\Bigg|_{y=f^{-1}(x)}$$
   ja sovella sitä tehtävän funktioon kohdassa $x = 2\pi$.

3. Olkoon
   $$S_n = \int_0^\pi x^n \sin x\,dx \quad \text{ja} \quad C_n = \int_0^\pi x^n \cos x\,dx,$$
   kun $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
   a) Johda osittaisintegroimalla palautuskaavat
   $$S_n = \pi^n + nC_{n-1} \quad \text{ja} \quad C_n = -nS_{n-1}, \quad \text{kun } n \geq 1.$$
   b) Laske a-kohdan kaavoja käyttämällä integraali S_4 palauttamalla se helppoon integraaliin S_0.

Käännä!

4. Tarkastellaan integraalia
$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx.$$
a) Määritä integraalin likiarvo korvaamalla eksponenttifunktio e^t sen toisen asteen Maclaurin-polynomilla ja sijoittamalla siihen uusi muuttuja.
Huom: Maclaurin = Taylor tapauksessa $x_0 = 0$.
b) Laske integraalin tarkka arvo sopivan sijoituksen avulla.

5. a) Pyramidihuijarin keräämien sijoitusten arvo $y = y(t)$ ajan t funktiona toteuttaa differentiaaliyhtälön
$$y' = ky,\ k > 0 \text{ vakio},$$
ja alkuehdon $y(0) = 1000$ euroa. Viranomaisten puuttuessa huijaukseen hetkellä $t = 2$ vuotta tilin saldo on $y(2) = 10^7$ euroa. Määritä näiden tietojen perusteella kerroin k. Vastaukseksi riittää tarkka arvo.
b) Differentiaaliyhtälöllä
$$y' = 3y^{2/3} = 3\sqrt[3]{y^2}$$
on erikoisratkaisu $y(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Määritä separointimenetelmän avulla yhtälölle toinenkin ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(0) = 0$.
(Seuraus: Yksikäsitteisyyslause ei päde tässä tapauksessa.)

6. Määritä differentiaaliyhtälön $y'' - 5y' - 6y = 36x + 36$ ratkaisu alkuehdoilla $y(0) = y'(0) = 0$.

Lisätieto: Eräitä trigonometristen funktioiden arvoja:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{6} & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \sin(\alpha) & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha) & 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & -1 \\ \tan(\alpha) & -1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & - & 0 \end{bmatrix}$$

Eräitä kaavoja:

$$\begin{aligned} D\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \end{aligned}$$

Huom. 1: Kurssin palautekyselyyn vastaamisesta saa yhden koepisteen!

Huom. 2: Kurssitentin voi uusia II-periodin tentin yhteydessä, jolloin laskaripisteet ovat vielä voimassa. **Myös uusijoiden täytyy ilmoittautua tenttiin.**