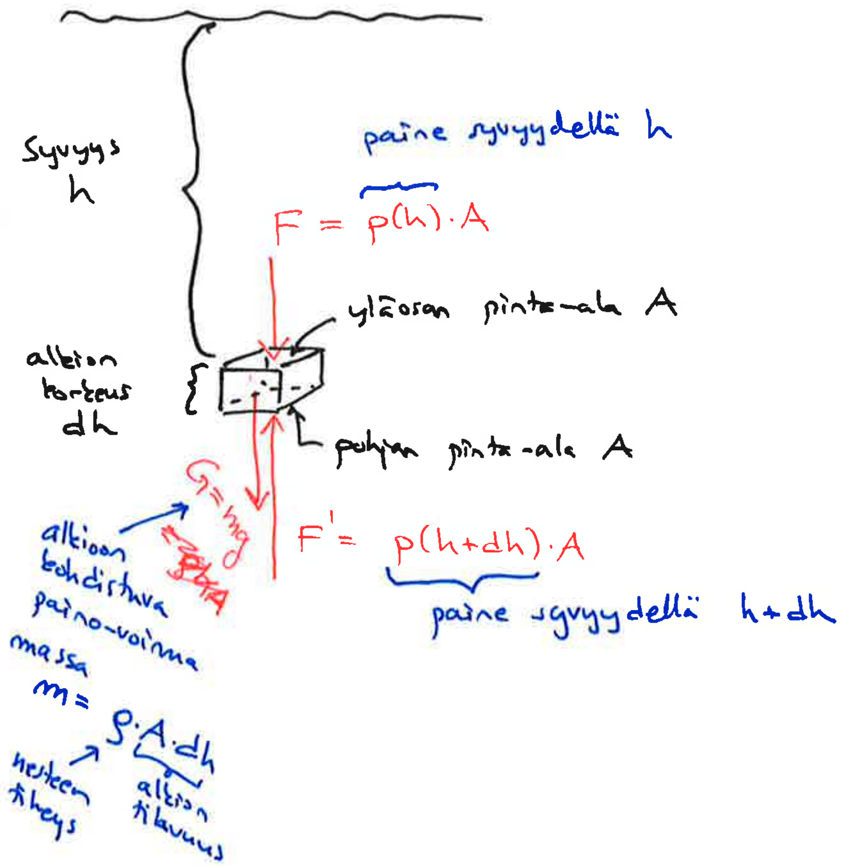
Hydrostaattinen paine

Oletus: staattinen $\rightarrow$ ei makroskooppisia virtauksia

Tarkastellaan nesteessä/fluidissa syvyydellä h olevaa pientä tilavuusalkiota



Staattisessa tapauksessa voimat kumoavat toisensa:

$$\Rightarrow \quad p(h)\cdot A + mg = p(h+dh)\cdot A$$

$$\Rightarrow \quad p(h)A + \rho A\,dh\,g = p(h+dh)\cdot A \qquad \Big|:A$$

$$\Rightarrow \quad p(h) + \rho\,dh\,g = p(h+dh) \qquad \Big|-p(h)$$

$$\Rightarrow \quad p(h+dh) - p(h) = \rho g\,dh \qquad \Big|:dh$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p(h+dh)-p(h)}{dh} = \rho g \qquad \Big|\ \lim\ dh \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{dh\to 0}\frac{p(h+dh)-p(h)}{dh} = \boxed{\frac{dp(h)}{dh} = \rho g} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\boxed{p(h) = p(0) + \rho g h}}_{\text{hydrostaattinen paine}}$$

vakio, ei riipu syvyydestä

syvyydellä h=0 ilmanpaine

paine eli "mittapaine"

paineen derivaatta syvyyden h suhteen.

Noste:

Mikäli tilavuusalkio olisi jostakin syystä massaton, olisivat paine-erot ja niiden aiheuttamat voimat edelleen samat mutta paino-voima $G = 0$.

$\Rightarrow$ nettovoima ylöspäin.

Noste $$N = p(h+dh)\cdot A - p(h)\cdot A$$

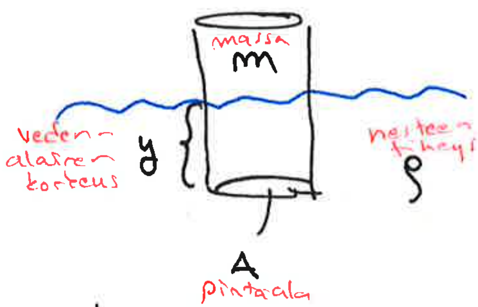
$$= \left[\cancel{p(0)} + \rho g \cancel{(h}+dh)\right]\cdot A - \left[\cancel{p(0)} + \cancel{\rho g h}\right]\cdot A$$

$$= \rho g \underbrace{dh\cdot A}_{\substack{\text{tilavuusalkion}\\ \text{tilavuus}\\ V}}$$

$\Rightarrow$ kappaleeseen ~~syvyydellä~~ kohdistuu ylöspäin oleva voima, eli noste

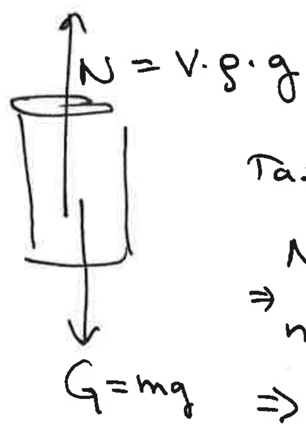
$$\boxed{N = \rho g\cdot \underbrace{V}_{\text{kappaleen tilavuus (veden alla)}}}.$$

Esimerkki: Poiju



syrjäytetty tilavuus (vedenalainen tilavuus)

$V = y\cdot A$



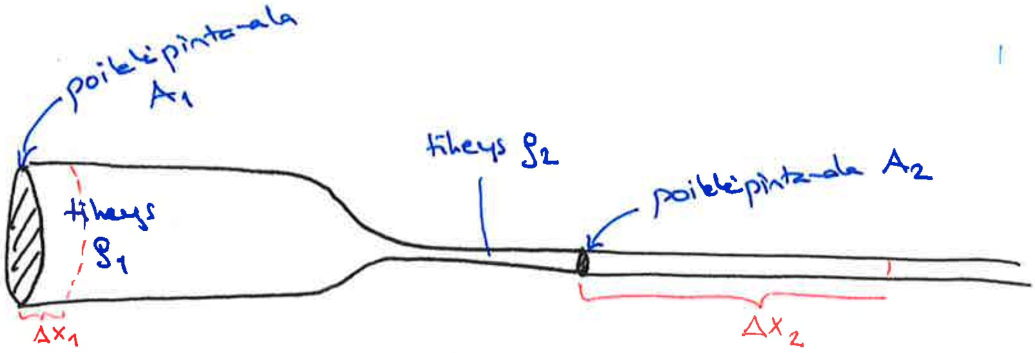
Tasapainossa:

$N = G$

$\Rightarrow mg = V\rho g = y\cdot A\cdot \rho$

$\Rightarrow y = \dfrac{m}{A\rho}$ = tasapainosyvyys.

Jatkuvuusyhtälö eli aineen säilymislaki



Jatkuvuusyhtälö = aineen säilymislaki

⇒ jos putken vasemmasta päästä tunkeutaan sisään ainetta (fluidia) määrä m, täytyy sama määrä tulla ulos oikeasta päästä.

$$\Rightarrow \overbrace{\underbrace{A_1 \Delta x_1}_{\text{fluidin tilavuus vasemmalla}} \cdot \rho_1}^{\text{fluidin massa vasemmalla}} = \overbrace{\underbrace{A_2 \cdot \Delta x_2}_{\text{fluidin tilavuus oikealla}} \cdot \rho_2}^{\text{fluidin massa oikealla}}$$

Jos prosessi tapahtuu ajassa Δt:

$$\Rightarrow A_1 \Delta x_1 \rho_1 = A_2 \Delta x_2 \rho_2 \quad \Big| : \Delta t$$

$$\Rightarrow A_1 \rho_1 \cdot \underbrace{\frac{\Delta x_1}{\Delta t}}_{\substack{\text{nopeus vasemmalla} \\ v_1}} = A_2 \rho_2 \cdot \underbrace{\frac{\Delta x_2}{\Delta t}}_{\substack{\text{nopeus oikealla} \\ v_2}}$$

$$\Rightarrow A_1 \rho v_1 = A_2 \rho_2 v_2$$

Tämä tulos pätee kaikille

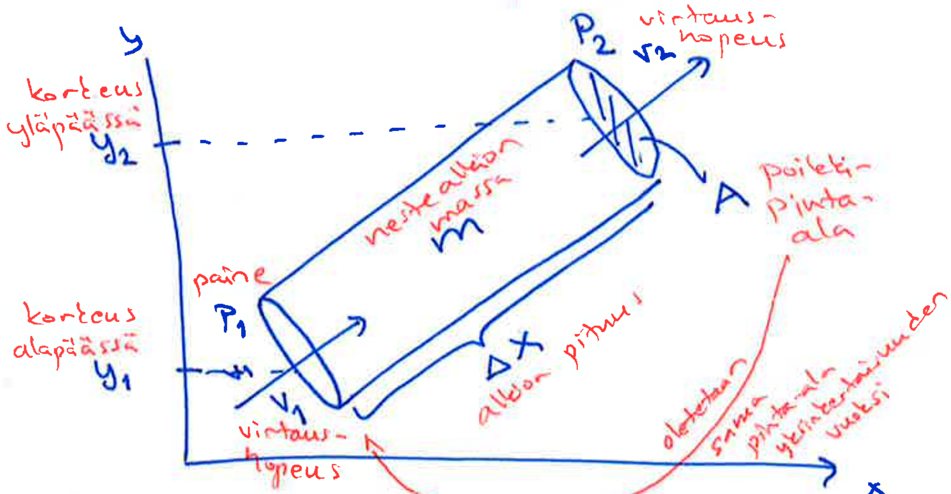
$$\Rightarrow \boxed{A \rho v = \text{vakio}}$$

Jos kyseessä kokoonpuristumaton fluidi

$$\Rightarrow \rho = \text{vakio}$$

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot v = \text{vakio}}$$

Bernoullin yhtälö eli energian säilymislaki



Fluidi virtaa putkessa. Tarkastellaan neste-alkiota, massa $m = A \cdot \Delta x \cdot \rho$ joka etenee putkessa.

Neste-alkiolla on $\begin{cases} \text{liike-energiaa alussa} & \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \text{potentiaalienergiaa alussa} & mgy_1 \end{cases}$

Lopussa $\begin{cases} \text{liike-energia} & \frac{1}{2}mv_2^2 \\ \text{potentiaalienergia} & mgy_2 \end{cases}$

Paine kohdistaa nestealkioon voiman joka tekee työtä:

Voima vasemmalla $F_1 = p_1 \cdot A$

$\Rightarrow$ tekee työn $W_1 = p_1 A \cdot \Delta x$ (positiivinen, koska voima samaan suuntaan neste-alkion liikkeen kanssa)

Voima oikealla $F_2 = -p_2 \cdot A$

$\Rightarrow$ työ $W_2 = -p_2 A \cdot \Delta x$ (negatiivinen, koska voima ja liike vastakkais-suuntaiset)

Energian säilymislaki:

$$\underset{\text{energia alussa}}{E_1} + \underset{\text{tehty työ}}{W} = \underset{\text{energia lopussa}}{E_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + p_1 A \Delta x - p_2 A \cdot \Delta x = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + p_1 A \Delta x}_{\text{vain paikkaan 1 liittyviä suureita}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + p_2 A \Delta x}_{\text{vain paikkaan 2 liittyviä suureita}}$$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgy + pA\Delta x = \text{vakio}.$

Jaetaan massalla m:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 + gy + p\,\frac{\cancel{A\Delta x}}{\underbrace{m}_{=\cancel{A\Delta x}\cdot\rho}} = \text{vakio}$$

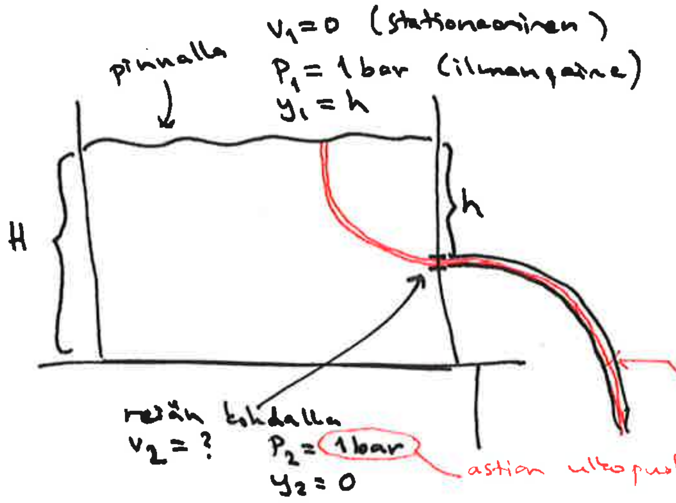
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}v^2 + gy + \frac{p}{\rho} = \text{vakio}}$$

Bernoullin yhtälö eli energian säilymislaki fluidin virtauksessa.

Jos kyseessä <u>kokoonpuristumaton fluidi</u> (neste?) on tiheys vakio jolloin voidaan kertoa tiheydellä:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y + p = \text{vakio}}\ , \text{ kun } \rho = \text{vakio}.$$

Reikä vesisäiliön seinässä



Reikä vesisäiliön reunassa korkeudella h vedenpinnasta mitattuna.

Millä nopeudella vesi purkautuu reiästä?

Oletus: - laminaarinen virtaus
- kokoonpuristumattomuus

Bernoulli:

sama paine, sama tiheys

$$\cancel{\tfrac{1}{2}v_1^2} + gh_1 + \cancel{P_1/\rho} = \tfrac{1}{2}v_2^2 + gh_2 + \cancel{P_2/\rho}$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(\underset{h}{h_1} - \underset{0}{h_2})} = \sqrt{2gh}.$$