



Aalto-yliopisto  
Sähkötekniikan  
korkeakoulu

# ELEC-A4130 Sähkö ja magnetismi (5 op)

Henrik Wallén

Kevät 2020

Tämä luentomateriaali on suurelta osin Sami Kujalan ja Jari J. Hännisen tuottamaa

## Luentoviikko 6

### Magneettikentän lähteet (YF 28)

Liikkuvan varauksen magneettikenttä

Virta-alkion magneettikenttä

Suoran virtajohtimen magneettikenttä

Virtajohtimien välinen voima

Pyöreän virtasilmukan magneettikenttä

Lävistyslaki

Lävistyslain sovelluksia

Magneettiset materiaalit

Yhteenveto



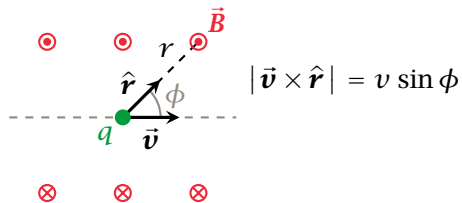
Magneettisesti leijutettu mansikka:

<http://www.ru.nl/hfml/research/levitation/diamagnetic/>

## Liikkuva pistevaraus

- Tähän asti magneettikenttä on otettu "annettuna" – mutta **miten** magneettikenttä luodaan?
- Kokeellisesti** on havaittu, että etäisyydellä  $r$  **vakionopeudella**  $\vec{v}$  etenevästä pistevarauksesta  $q$  on magneettikenttä

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$$

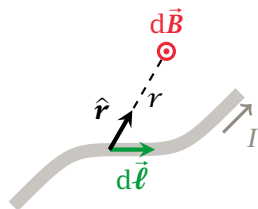


- Kenttäviivat ovat aikariippuvia ympyröitä, joiden akselina on kulkurata. (Kuvassa  $q > 0$ .)
- Vakio  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m/A}$  on tyhjiön permeabilisuus (tai permeabiliteetti).  
Lisäksi  $1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$  on valonnopeus tyhjiössä.

## Biot–Savartin laki

- ▶ Lyhyessä **virta-alkiossa**  $d\ell$  on varaus  $dQ = nqA d\ell$  ( $A$  = johtimen poikkipinta-ala) ja varaus liikkuu nopeudella  $v_d \Rightarrow |dQ| v_d = I d\ell$
- ▶ Virta-alkio  $d\ell$  aiheuttaa magneettikentän

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$



- ▶ Todellisuudessa vain suljetut virtapiirit ovat mahdollisia!
- ▶ **Suljetun virtapiirin** kokonaiskenttä saadaan integroimalla:

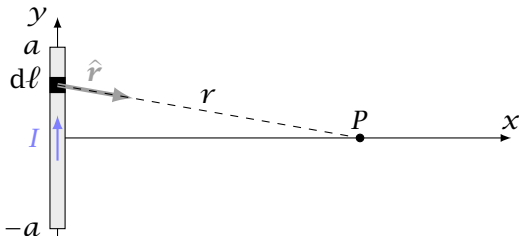
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

**Biot–Savartin laki**

- ▶ (Myös **Biot'n ja Savartin laki**; Biot = [bi:ou], Savart = [sə'var])

## Suora virtajohdin

- ▶ Tärkeä Biot–Savartin lain sovellus
- ▶ Johtimen pituus olkoon  $2a$  (miten virtapiiri sulkeutuu?)



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(\hat{j} dy) \times (x\hat{i} - y\hat{j})}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-\hat{k}\mu_0 I x dy}{4\pi(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int_{-a}^a d\vec{B} = -\hat{k} \frac{\mu_0 I x}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \dots = -\hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

# Suora virtajohdin

## Jatkoa

- ▶ Jos virtajohdin on erittäin pitkä ( $a \gg x$ ),

$$\sqrt{x^2 + a^2} \approx a \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

- ▶ Tuloksen voi yleistää ( $r$  on etäisyys johtimesta):

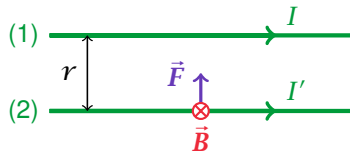
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(pitkän suoran johtimen magneettikenttä)

- ▶ **Kenttäviivat** ovat johdinta kiertäviä **ympyröitä**, ja kentän suunnan (= sormet) saa **oikean käden säännöllä** virrasta (= peukalo)

## Kaksi johdinta vierekkäin

- ▶ Otetaan kaksi pitkää suoraa johdinta (pituus  $L$ ), joiden virrat  $I$  ja  $I'$  kulkevat samaan suuntaan
- ▶ Johdin (1) tuottaa etäisyydellä  $r$  olevan johtimen (2) kohdalle magneettikentän  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
- ▶ Magneettikenttä kohdistaa toiseen johtimeen (2) voiman



$$F = |I' \vec{L} \times \vec{B}| = I' L B = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

( $F/L$  on voima pituusyksikköä kohti)

- ▶ Soveltamalla oikean käden sääntöä kahdesti (kentän suunta & voiman suunta) huomataan, että **samansuuntaista** virtaa kuljettavat johtimet **vetävät toisiaan** puoleensa ja **vastakkaissuuntaista** virtaa kuljettavat johtimet **hylkivät toisiaan**

# Ampeerin määritelmä

- ▶ Voimavaikuksesta saadaan **toiminnallinen** määritelmä ampeerille
- ▶ Yksi ampeeri on tasavirta, joka aiheuttaa kahden, metrin etäisyydellä toisistaan olevan yhdensuuntaisen johtimen välille pituusyksikköä kohden voiman  $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$
- ▶ Määritelmästä seuraa

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 (1 \text{ A})^2}{2\pi (1 \text{ m})} = 2 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T m}}{\text{A}}$$

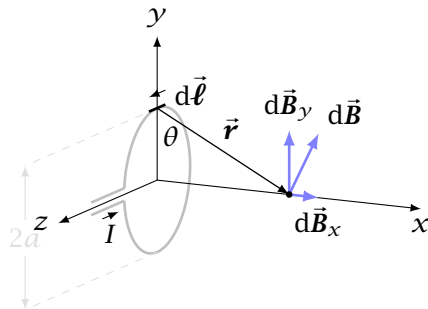
( $\mu_0$ :n SI-yksikkö voidaan kirjoittaa monella tavalla)



# Pyöreän virtasilmukan magneettikenttä

- ▶ Lasketaan magneettikenttä **silman akselilla** Biot–Savartin lain avulla
- ▶ Suorien osien magneettikentät **kumoavat toisensa**
- ▶ Lisäksi  $d\vec{\ell} \perp \hat{r}$ , joten

$$|d\vec{B}| = dB = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{x^2 + a^2}$$



- ▶ Vektorin  $d\vec{B}$  komponentit **kuvan  $d\vec{\ell}$ -alkion** tapauksessa ovat

$$dB_x = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{x^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$dB_y = dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

# Pyöreän virtasilmukan magneettikenttä

Integroidaan...

- ▶ Kokonaismagneettikenttään ei jää  $yz$ -tason suuntaisia komponentteja symmetrian takia
- ▶ Kokonaismagneettikenttä on  $x$ -suuntainen

$$B = B_x = \int dB_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \underbrace{\int d\ell}_{=2\pi a} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (x^2 + a^2)^{3/2}}} \quad (B\text{-kenttä virtasilmukan akselilla})$$

(kentän suunta akselilla [= peukalo]: oikean käden sääntö virran [= sormet] suhteen)

- ▶ Jos samalla akselilla on  $N$  identtistä silmukkaa,  $B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2 (x^2 + a^2)^{3/2}}$

# Kela

- ▶  $N$ -kierroksisen kelan maksimimagneettikenttä on kelan keskellä ( $x = 0$ ):

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 NI}{2a} \quad (\text{kelan keskellä})$$

- ▶ Kelan magneettinen dipolimomentti  $\mu = NIA = NI\pi a^2$ , joten toisaalta

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (\text{kelan akselilla})$$

(huomaa:  $\mu_0$  on tyhjiön permeabilisuus,  $\mu$  kelan magneettinen momentti)

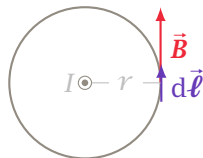
- ▶ **Magneetidipoli** (silmukka tai kela) on **magneettikentän lähde**
- ▶ Kelan akselilla kelavirran synnyttämä  $\vec{B}$  on **samansuuntainen**  $\vec{\mu}$ :n kanssa
- ▶ Kenttäviivat kiertävät silmukan läpi **mutteivät** ole ympyröitä

# Magneettikentän viivaintegraali

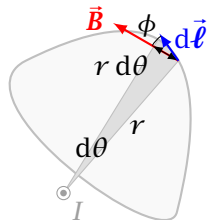
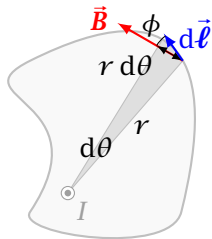
- ▶ Symmetrisen varausjakautuman sähkökenttä oli mahdollista määrittää **Gaussin lakia** käyttämällä
- ▶ Magnetismin Gaussin laissa ei näy lähteitä (virtoja), joten se ei käy magneettikentän määrittämiseen
- ▶ Magnetostatiikassa tarjolla on **lävistyslaki** eli [integraalimuotoinen] **Ampèren laki**, joka perustuu magneettikentän **viivaintegraaliin**
- ▶ Integroidaan **pitkän johtimen** magneettikenttää suljettua  $r$ -säteistä ympärää pitkin:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B_{\parallel} d\ell = B \oint d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I$$

- ▶ Virta  $I$  on integrointitien rajoittaman **pinnan läpi kulkeva** virta (kun oikean käden sormet osoittavat tien suuntaan, peukalo osoittaa virran **positiivisen** suunnan)



# Yleinen tapaus



$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B d\ell \cos \phi$ , yllä  $d\ell \cos \phi = r d\theta$ :

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\theta) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta = \mu_0 I\end{aligned}$$

( $\theta$ :n nettomuutos on  $2\pi$ )

Nyt integraali = 0, koska  $\theta$ :n nettomuutos kierroksen aikana on nolla

# Lävistyslaki

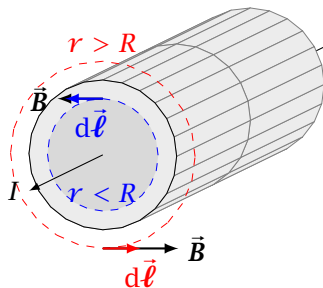
- ▶ Tulos on riippumaton integrointitien rajaaman pinnan muodosta
    - ▶ Jos virta  $I$  lävistää pinnan positiiviseen suuntaan, tulos on  $\mu_0 I$
    - ▶ Jos virta ei lävistä pintaa, tulos on nolla
    - ▶ Johtopäätös pysyy samana, vaikka virtojen määrää lisätään; voidaan korvata  $\mu_0 I \rightarrow \mu_0 I_{\text{encl}}$ , missä  $I_{\text{encl}}$  on integrointitien sisään jäävien virtojen summa **etumerkkeineen (oikean käden sääntö tien suunnan ja virran positiivisen suunnan välillä)** eli integrointitien rajaaman pinnan läpi kulkevien virtojen summa
- = **Lävistyslaki** eli [integraalimuotoinen] **Ampèren laki**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

- ▶ Käyttökelpoinen työkalu magneettikenttien analysoimiseen
- ▶ **Käyttökelpoisuus edellyttää symmetriaa**, vrt. Gaussin laki
- ▶ Huomaa: Ampèren lakia voi käyttää **tässä muodossa vain statiikassa!**
- ▶ (Ampère = [āpɛʀ])

# Pitkän sylinterijohdtimeen kenttä

- ▶ Sylinterijohdin, virta  $I$ , halkaisija  $2R$
- ▶ Symmetriasta voidaan päätellä, että magneettikenttä riippuu vain etäisyydestä johtimen akselista ja että kenttä kiertää johdinta oikean käden säännön mukaisesti (peukalo virran suuntaan – sormet osoittavat kentän suuntaan)



- ▶ Kaikkialla  $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$  ja  $B$  vakio integrointiella  $\Rightarrow$  lävistyslakia kannattaa käyttää:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint d\ell = B(2\pi r)$$

- ▶ Sylinterin sisällä ( $r < R$ )  $I_{\text{encl}} = J\pi r^2 = \frac{I}{\pi R^2}(\pi r^2) = I \frac{r^2}{R^2}$

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{encl}} = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

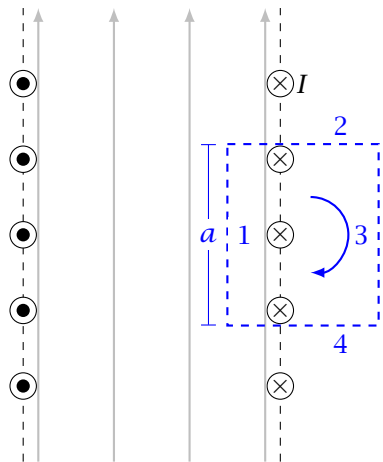
- ▶ Sylinterin ulkopuolella ( $r > R$ )  $I_{\text{encl}} = I \Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- ▶ Sama tulos kuin pitkällä johtimella

# Solenoidin kenttä

- ▶ Suora, [erittäin]monikierröksinen sylinterimäinen käämi
- ▶ Tiheän solenoidin keskellä on **tasainen, akselin suuntainen kenttä**:  $B = \text{vakio}$
- ▶ Pitkän solenoidin **ulkopuolella**  $B \approx 0$
- ▶ Oletetaan  $N$  johdinkierrosta, solenoidin pituus  $L$  ja **virta**  $I$
- ▶ Valitaan **integrointitie ja -suunta**
- ▶ Lasketaan  $\int \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  erikseen osuuksilla 1...4





# Solenoidin kenttä

## Jatkoa

- ▶ Osuus 1:  $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$  ja  $B = \text{vakio}$

$$\Rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \int d\ell = Ba$$

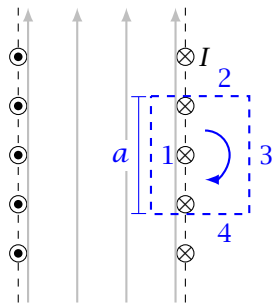
- ▶ Osuudet 2...4: sisällä  $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$  ja ulkopuolella  $B = 0$

$$\Rightarrow \int \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- ▶ Koska käämimistiheys  $n = N/L$ ,  $I_{\text{encl}} = naI$
- ▶ Lävistyslaki:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = Ba = \mu_0 I_{\text{encl}} = \mu_0 naI \Rightarrow B = \mu_0 nI$$

(solenoidin sisäkenttä)

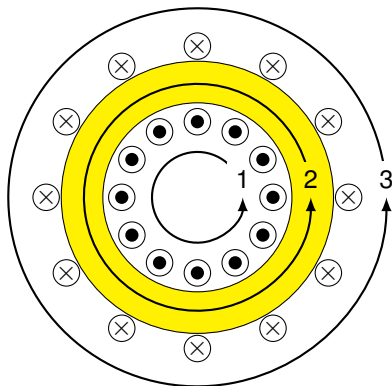


# Toroidikelman kenttä

- ▶ Symmetrian takia kenttäviivojen **täytyy** olla toroidin akselin kanssa samankeskisiä ympyröitä
- ▶ Solenoidin virta on  $I$  ja kierrosmäärä  $N$
- ▶ Tutkitaan kolmea eri integrointitietä

- ▶ Tie 1:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r) = 0 \Rightarrow B = 0$
- ▶ Tie 3:  $I_{\text{encl}} = 0 \Rightarrow B = 0$
- ▶ Tie 2:  $I_{\text{encl}} = NI$ , joten

$$2\pi r B = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$



# Magnetoituminen

- ▶ Atomytimiä kiertävät elektronit muodostavat virtasilmuksia  $\Rightarrow$  magneettinen momentti
- ▶ Monissa materiaaleissa virrat ovat satunnaisesti suuntautuneet **eikä magneettista nettomomenttia synny**
- ▶ Joissakin materiaaleissa ulkoinen magneettikenttä voi kääntää momentit enimmäkseen kentän suuntaisiksi, jolloin aine **magnetoituu** (vrt. eristeen polarisoituminen sähkökentässä)
- ▶ Elektroneilla lisäksi on sisäinen liikemäärämomentti eli **spin** (kvanttimekaanisessa mielessä)
- ▶ Tarkka (tarkahko) magnetoitumisen tarkastelu edellyttää kvanttimekaniikan työkaluja

# Magnetoitumisen lajit

## Paramagnetismi

- ▶ Joidenkin aineiden atomeilla on pieni pysyvä magneettinen dipolimomentti, joka syntyy atomien elektronien rata- ja spinliikemäärämomenteista: aine on **paramagneettista**
- ▶ Ulkoinen kenttä vääntää aineen dipolit itsensä suuntaisiksi, jolloin nettokenttä **vahvistuu**
- ▶ Tällaisessa aineessa magneettikenttä on kertoimella  $K_m$  (**suhteellinen permeabilisuus**) suurempi kuin tyhjiössä ( $K_m$  on yksikötön kuten  $K$ )
- ▶ Aineen **permeabilisuus**  $\mu$  on suhteellisen permeabilisuuden  $K_m$  ja **tyhjiön permeabilisuuden**  $\mu_0$  tulo:

$$\mu = K_m \mu_0$$

- ▶ Esimerkiksi alumiinin  $K_m = 1.000022$ , mikä selittää, miksi magneetit vetävä alumiinia puoleensa erittäin heikosti (permeabilisuus kuitenkin kasvaa **lämpötilan laskiessa**)
- ▶ (Suhteellisen permeabilisuuden poikkeama ykkösestä on **magneettinen susceptiivisuus**  $\chi_m = K_m - 1$ .)

(Huom: **permeabilisuus** = **permeabiliteetti**. Ensimmäinen on SFS-standardin mukainen, mutta toinen on yleisempi.)

# Magnetoitumisen lajit

## Diamagnetismi

- ▶ Joillakin aineilla ulkoinen magneettikenttä indusoi [Faradayn induktiolain mukaisesti] atomeihin magneettisen dipolimomentin, jonka muodostama kenttä **vastustaa ulkoista kenttää** (kuten käy eristeelle sähkökentässä); tällainen aine on **diamagneettista**
- ▶ Indusoitunut kenttä on tyypillisesti heikko, mutta joillakin materiaaleilla se voi kumota ulkoisen magneettikentän aineen sisällä  $\Rightarrow$  suprajohtavuus (matalissa lämpötiloissa, vaikka diamagneettisuuden lämpötilariippuvuus on muuten vähäinen)
- ▶  $K_m \sim 0.99990 \dots 0.99999$
- ▶ (Elollinen aine on diamagneettista, joten sitä voi leijuttaa voimakkaassa magneettikentässä, vrt. sisällysluettelon kuva ja linkit)

# Magnetoitumisen lajit

## Ferromagnetismi

- ▶ Joissakin aineissa (esim. rauta, nikkeli) atomien magneettiset momentit vaikuttavat toisiinsa voimakkaasti ja **magneettisten alkeisalueiden** sisällä momentit samansuuntaistuvat
- ▶ Yleensä (ilman ulkoista kenttää) alkeisalueet ovat keskenään satunnaisesti suuntautuneita
- ▶ Ulkoisessa kentässä alkeisalueiden momentit kääntyvät kentän suuntaisiksi, kentän suuntaiset alueet kasvavat ja muunsuuntaiset alueet pienenevät  $\Rightarrow$  voimakas nettomagnetoituma; tällaiset aineet ovat **ferromagneettisia**
- ▶  $K_m \sim 1000 \dots 100000$
- ▶ Ferromagneettisen aineen  $K_m$  riippuu ulkoisen kentän voimakkuudesta (vaste on **epälineaarinen**) ja magnetoitumahistoriasta (**hystereesi**; aineella on ”muisti”, jota voi käyttää kestopagneettien tekemiseen)

# Yhteenveto luvusta 28

## Keskeisiä käsitteitä

- ▶ Liikkuvan varauksen magneettikenttä
- ▶ Virran aiheuttama magneettikenttä
- ▶ Virtajohtimien välinen voima
- ▶ Paramagneettinen, diamagneettinen ja ferromagneettinen aine
- ▶ Permeabilisuus  $\mu = K_m \mu_0$

Käytä lävistyslakia, jos mahdollista, koska se on paljon helpompi kuin Biot–Savartin laki.

## Tärkeitä kaavoja

Biot–Savartin laki

$$\vec{B} = \oint \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Pitkän suoran virtalangan kenttä

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$


Lävistyslaki eli Ampèren laki

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

sopivan symmetrisessä tapauksessa

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{\text{encl}}}{2\pi r}$$