Tentti 10.12.2020

Ratkaisut

Tehtävä 1

> $sum\left(\frac{3^{k+1}}{5^k}, k = 1 ..\text{infinity}\right)$

$$\frac{9}{2} \tag{1.1}$$

Arvostelu: Geometrisen sarjan idea 1p, oikea vastaus 1p.

> $limit\left(\frac{k^2}{k^2+3}, k = \text{infinity}\right)$

$$1 \tag{1.2}$$

Sarjan yleisen termin raja-arvo ei ole nolla, joten sarja hajaantuu.

Arvostelu: Raja-arvo 1p, vastaus 1p. Myös minoranttiperiaatteella
yleinen termi $\geq$ 1. termi = 1/4.

> $a := k \rightarrow \frac{k^2 \cdot x^k}{9^k}$

$$a := k \mapsto \frac{k^2 x^k}{9^k} \tag{1.3}$$

> $limit\left(\text{abs}\left(\frac{a(k+1)}{a(k)}\right), k = \text{infinity}\right)$

$$\frac{|x|}{9} \tag{1.4}$$

Suhdetestin perusteella sarja suppenee, jos $\frac{|x|}{9} < 1$, ja hajaantuu, jos $\frac{|x|}{9} > 1$,
joten suppenemissäde on $R = 9$.

Arvostelu: Suhdetesti 1p, vastaus 1p. Oikeasta vastauksesta voi antaa 1p,
vaikka perustelu puuttuu.

Tehtävä 2

> $limit\left(\frac{n^3 - n}{n^3 + 4 \cdot n^2 + n - 6}, n = \text{infinity}\right)$

$$1 \tag{2.1}$$

Arvostelu: n^3 tekijäksi 1p, supistaminen 1p, vastaus 1p.

> $limit\left(\frac{x^3 - x}{x^3 + 4 \cdot x^2 + x - 6}, x = 1\right)$

$$\frac{1}{6} \tag{2.2}$$

Arvostelu: Supistettu $(x-1)$ 1p, sijoitus $x=1$ 1p, vastaus 1p.
Tai L'Hospital idea 1p, derivoinnit 1p, vastaus 1p.

Tehtävä 3

> $f := x \to 3\cdot x + \sin(2\cdot x)$

$$f := x \mapsto 3\,x + \sin(2\,x) \quad (3.1)$$

> $taylor(f(x), x=0, 4)$

$$5\,x - \frac{4}{3}\,x^3 + \mathrm{O}(x^5) \quad (3.2)$$

> $convert(\%, polynom)$

$$5\,x - \frac{4}{3}\,x^3 \quad (3.3)$$

Arvostelu: +1p/oikea kerroin, ylimääräisiä termejä -1p. Tässä kohdassa ei pisteitä pelkästä derivaatasta.

> $f'(x)$

$$3 + 2\cos(2\,x) \quad (3.4)$$

Derivaatta on $\geq 3-2=1$, joten funktio on aidosti kasvava.
(Se on myös surjektio, joten käänteisfunktio on olemassa.)

Arvostelu: Derivaatta 1p, perustelu 1p ($f'(x) > 0$ riittää)

> $f(\mathrm{Pi})$

$$3\,\pi \quad (3.5)$$

Käänteisfunktion derivaattakaavan avulla kysytty derivaatta on

> $\dfrac{1}{f'(\mathrm{Pi})}$

$$\frac{1}{5} \quad (3.6)$$

Arvostelu: Saatu arvo π 1p, vastaus 1p. Käänteisfunktion derivaatan kaava väärällä arvolla yhteensä 1p.

Tehtävä 4

> $convert\left(\dfrac{1}{t\cdot(1+t)}, parfrac, t\right)$

$$-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} \quad (4.1)$$

Arvostelu: Laventaminen tai kerrotaan nimittäjät pois 1p, kertoimet yhteensä 1p.

Tätä voi käyttää apuna integroinnissa sijoituksen jälkeen,
lasketaan suoraan:

> $Int\left(\dfrac{1}{1+\exp(x)}, x=0..\ln(3)\right) = int\left(\dfrac{1}{1+\exp(x)}, x=0..\ln(3)\right)$

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{1}{1+e^x}\,dx = -\ln(2) + \ln(3) \quad (4.2)$$

Sijoituksessa $dx = \dfrac{dt}{t}$ ja rajat $x=0 \Rightarrow t=1,\ x=\ln(3) \Rightarrow t=3.$

Arvostelu: dx-muutos 1p, rajat 1p, integraalina ln 1p, vastaus 1p.

Tehtävä 5

> $dsolve(\{y'(t) = -k \cdot y(t), y(0) = 12000\})$

$$y(t) = 12000\, \mathrm{e}^{-k t} \tag{5.1}$$

> $subs(t = 12, rhs(\%)) = 4000$

$$12000\, \mathrm{e}^{-12\, k} = 4000 \tag{5.2}$$

> $k = solve(\%)$

$$k = \frac{\ln(3)}{12} \tag{5.3}$$

Arvostelu: Ratkaisun lauseke 1p, yhtälö k:lle 1p, vastaus 1p.

> $dsolve(\{y'(x) = -y(x)^2, y(0) = 10\})$

$$y(x) = \frac{10}{1 + 10\, x} \tag{5.4}$$

Yhtälö on separoituva ja ratkeaa standardimenetelmällä.

Arvostelu: Separoinnin alku 1p, integroinnit 1p, alkuehto ja vastaus 1p.
Alkuehdon soveltamisesta voi antaa pisteen, vaikka integrointi väärin.

Tehtävä 6

> $f := x \to x^2;\ g := x \to x^3$

$$f := x \mapsto x^2$$
$$g := x \mapsto x^3 \tag{6.1}$$

> $x^2 \cdot f''(x) + \text{alpha} \cdot x \cdot f'(x) + \text{beta} \cdot f(x) = 0, x^2 \cdot g''(x) + \text{alpha} \cdot x \cdot g'(x) + \text{beta} \cdot g(x) = 0$

$$2\, \alpha\, x^2 + \beta\, x^2 + 2\, x^2 = 0, 3\, \alpha\, x^3 + \beta\, x^3 + 6\, x^3 = 0 \tag{6.2}$$

> $solve(\{2 \cdot \text{alpha} + \text{beta} + 2 = 0, 3 \cdot \text{alpha} + \text{beta} + 6\})$

$$\{\alpha = -4, \beta = 6\} \tag{6.3}$$

> $subs(x = 1, C[1] \cdot x^2 + C[2] \cdot x^3) = 2, subs(x = 1, 2 \cdot C[1] \cdot x + 3 \cdot C[2] \cdot x^2) = 0$

$$C_1 + C_2 = 2, 2\, C_1 + 3\, C_2 = 0 \tag{6.4}$$

> $solve(\{\%\})$

$$\{C_1 = 6, C_2 = -4\} \tag{6.5}$$

Arvostelu: Derivointi ja sijoitukset 1p, yhtälöpari kertoimille 1p, ratkaistu α ja β 1p.
Yleisen ratkaisun muoto 1p, alkuehdoista yhtälöpari 1p, vastaus 1p.