Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Moring
Harjoitukset, Viikko 3, 2021

Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ M1 Tarkastellaan funktiota

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 - y^2}.$$

Onko funktiolla raja-arvo pisteessä $(1, 1)$? Voiko funktion määritellä pisteessä $(1, 1)$ s.e. se on jatkuva?

TEHTÄVÄ M2 Jatkoa edelliseen: Voiko funktion määrittelyaluetta laajentaa s.e. se on jatkuva koko xy-tasossa?

TEHTÄVÄ J1 Todista, että seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a) } \frac{(1 + y^2)\sin x}{x}, \qquad \text{b) } \frac{x \tan y}{y}.$$

Ratkaisu: a) 1; b) 0.

TEHTÄVÄ J2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0, 0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{a) } \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad \text{b) } \frac{xy(x^3 + y)}{x^4 + y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?
Ratkaisu: a) Ei voida; b) $a = 0$.

TEHTÄVÄ K1 Olkoon geometrisessa avaruudessa E^3 määriteltynä reaaliarvoinen funktio

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \neq 0,$$

missä a ja b ovat lineaarisesti riippumattomia vakiovektoreita. Tutki, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{o}} f(\mathbf{r}).$$

Ratkaisu: Ei ole.

TEHTÄVÄ K2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{c)}\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{d)}\ \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{x^2+y^2}, \quad \text{e)}\ \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?
Ratkaisu: c) $a = 0$; d) $a = \frac{1}{2}$; e) $a = 1$.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ M1 Evaluoi funktion $f(x, y) = xy + x^2$ molemmat osittaisderivaatat pisteessä $(2, 0)$.

TEHTÄVÄ M2 Etsi funktion $f(x, y) = y^2 + x^2$ kaikki toiset osittaisderivaatat.

TEHTÄVÄ J1 Määritä se pinnan $\mathbf{r}(u, v) = (u+v)\mathbf{i} + (u^2+v^2)\mathbf{j} + (u^3+v^3)\mathbf{k}$ piste, jossa tangenttitaso on tason $9x + 3y - z = 0$ suuntainen. Mikä on tangenttitason yhtälö?
Ratkaisu: $(2, 10, 26)$, $9x + 3y - z = 22$.

TEHTÄVÄ J2 Määritä pinnan $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\, \mathbf{i} + v \cos u\, \mathbf{j} + \cos u \cos v\, \mathbf{k}$ pisteeseen $(0, 0, 1)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.
Ratkaisu: $z = 1$.

TEHTÄVÄ K1 Määritä pinnan $\mathbf{r}(u, v) = u(1 + v)\mathbf{i} + u^2(1 - v)\mathbf{j} + u^3v\mathbf{k}$ pisteeseen $(1, 1, 0)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.
Ratkaisu: $2x - y - 3z = 1$.

TEHTÄVÄ K2 Etsi pinnan $z = x^2 + y^2$ tangenttitaso pinnan ja suoran $x = y = z$ origosta poikkeavassa leikkauspisteessä.

Haaste

Kertausta differentiaaliyhtälöistä: Laplace-yhtälön $\Delta u = 0$ radiaalinen eli säteittäinen muoto n-ulotteisessa avaruudessa on

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0.$$

(Tulkinta: $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = f(r)$, kun $n = 3$ jne. Tähän palataan myöhemmin.)
Määritä kaikki radiaaliset ratkaisut $f(r)$, kun
a) $n = 3$;
b) $n = 2$.
Vihjeitä: a-kohta: Kerro puolittain lausekkeella r^2, jolloin saadaan Euler-tyyppinen DY: siihen yrite $f(r) = r^\lambda$.
b-kohta (kertaluvun pudotus): Merkitse $v(r) = f'(r)$, jolloin $v'(r) = f''(r)$ ja saadaan separoituva (ja myös lineaarinen) 1. kertaluvun DY funktiolle $v(r)$. Lopuksi $f(r)$ integroimalla $v(r)$.