Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Moring
Harjoitukset, Viikko 4, 2021

H

Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ M1 Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{dw}{dt}$, kun

a) $w = xy + yz + zx, \quad x = e^t,\ y = 2t^2,\ z = e^{-t},$

b) $w = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, \quad x = 2t,\ y = t^2.$

TEHTÄVÄ M2 Olkoot f ja g kaksi kahdesti derivoituvaa funktiota $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja olkoon $h(x, y) = f(x\,g(y))$. Laske funktion h toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

TEHTÄVÄ J1 Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ ja $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, kun

a) $w = x\ln(x^2 + y^2), \quad x = s + t,\ y = s - t,$

b) $w = e^{x+2y}\sin(2x - y), \quad x = s^2 + 2t^2,\ y = 2s^2 - t^2.$

TEHTÄVÄ J2 Approksimoi linearisoimalla funktion

$$f(x, y) = \sin(\pi xy + \ln y)$$

arvo pisteessä $(0.01, 0.15)$.

TEHTÄVÄ K1 Olkoon $u(x,y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, missä $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on differentioituva funktio. Osoita, että lauseke $u_y \cos x + u_x \cos y$ on riippumaton funktiosta f.

TEHTÄVÄ K2 Olkoon $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Osoita, että $u(x,y,z) = 1/r$ on harmoninen koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$ origoa lukuun ottamatta. Harmoninen funktio toteuttaa yhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Loppuviikko

TEHTÄVÄ M1 Etsi vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion

$$f(x,y,z) = (x^2 + yz,\ 2ze^x,\ x \ln y)$$

Jacobin matriisi. Laske funktion differentiaali pisteessä $(0, 1, -2)$, kun $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1$.

TEHTÄVÄ M2 Mihin suuntiin funktion $f(x,y) = 2x - y^2$ suunnattu derivaatta origossa on $= 0$?

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavien funktioiden suunnatut derivaatat annettuihin suuntiin annetuissa pisteissä:

a) $f(x,y) = e^{x+y}, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (0,0),$
b) $f(x,y) = \sin(\pi x)\cos(\pi y^2), \quad \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad (1,2),$
c) $f(x,y,z) = xy^2z^3, \quad 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad (-3,2,1),$
d) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3, \quad \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad (3,-1,4).$

Ratkaisu: a) $\sqrt{2}$; b) $-\pi/\sqrt{5}$; c) $-60/7$; d) $155/\sqrt{6}$.

TEHTÄVÄ J2 Laske kohdassa a) vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion Jacobin matriisi ja kohdassa b) Taylorin polynomi

a) $f(x,y,z) = \left(xe^{-yz},\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y},\ \sqrt{x}z^2\right),$
b) $f(x,y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2,$ keskus $= (0,0)$, aste $= 3$.

Ratkaisu: a) $\begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -y/x^2 & 1/x - z/y^2 & 1/y \\ z^2/(2\sqrt{x}) & 0 & 2\sqrt{x}z \end{pmatrix}$; b) $2xy^2 - 5y^3$.

TEHTÄVÄ K1 Etsi pisteet, joissa funktion $f(x, y, z) = xy + \cos x + y^2 z$ gradientti on yz-tason suuntainen.

TEHTÄVÄ K2 Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$. Tutki, mihin suuntaan pisteestä $(3, -1, 4)$ on edettävä, jotta a) funktio kasvaisi mahdollisimman nopeasti, b) funktio ei kasvaisi lainkaan. Mikä on funktion derivaatta nopeimman kasvun suuntaan?

Ratkaisu: Derivaatta nopeimman kasvun suuntaan $\sqrt{5669} \approx 75.29$.

Haaste

Tarkastellaan osittaisdifferentiaaliyhtälöä $yu_x - xu_y = 0$, kun $u = u(x, y)$. Olkoon

$$U(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

ratkaisun esitys napakoordinaateissa.

a) Laske U_r, U_φ ja ratkaise osittaisderivaatat u_x ja u_y niiden avulla lausuttuna.

b) Osoita alkuperäisen yhtälön avulla, että $U_\varphi = 0$ ja totea, että kaikki ratkaisut u ovat radiaalisia.