Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Moring
Harjoitukset, Viikko 5, 2021

Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ M1 Näytä, että matriisi

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

on positiivisesti definiitti. (a) Laskemalla ominaisarvot ja (b) käyttäen Sylvesterin kriteeriä.

TEHTÄVÄ M2 Funktiolla $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y$ on yksi ääriarvo, suhteellinen minimi pisteessä $(-1,1)$. Onko kyseessä absoluuttinen minimi?

Ratkaisu: On. Siirry napakoordinaatteihin ja totea, että $f > 0$ ainakin, kun etäisyys origosta on ≥ 3.

TEHTÄVÄ J1 Etsi seuraaville funktioille f ne pisteet, joissa $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$, ja tutki lokaalin ääriarvon esiintymistä:

a) $y^4 + x^2 - 2xy$, b) $x^3 + xy + y^2 - 3x - 9y$, c) $x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2$.

TEHTÄVÄ J2 Etsi seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetussa joukossa:

a) $xy + x - y$, $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x + y + 1 \ge 0,\ x - y - 1 \le 0 \}$;
b) $x^2 - 2y^2 - xy - x$, $\{ (x, y) \mid x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1 \}$;
c) $3 + x - x^2 - y^2$, $\{ (x, y) \mid 2x^2 + y^2 \le 1 \}$.

Ratkaisu: a) $1, -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$; b) $\frac{17}{8}, -4$; c) $\frac{13}{4}$.

TEHTÄVÄ K1 Näytä, että funktion $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$ ainoa kriittinen piste on satulapiste. Kirjoita auki kaikki välivaiheet ja määritä Hessen matriisin definiittisyys sekä askemalla ominaisarvot että käyttäen Sylvesterin kriteeriä.

TEHTÄVÄ K2 Osoita, että funktiolla $f(x, y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$ ei ole ääriarvoa origossa, vaikka sen rajoittumalla jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on suhteellinen minimi.

Loppuviikko

TEHTÄVÄ M1 Mikä on lyhin etäisyys pisteestä $(0, -1)$ käyrällä $y = \sqrt{1 - x^2}$? Voiko tehtävän ratkaista Lagrangen kertoimien avulla?

TEHTÄVÄ M2 Määritä tason pisteen lyhimmän etäisyyden suorasta kaava Lagrangen kertoimien avulla.

TEHTÄVÄ J1 Etsi origon lyhin etäisyys hyperbelistä $x^2 + 8xy + 7y^2 = 45$ käyttäen Lagrangen kertoimia.
Ratkaisu: $\sqrt{5}$.

TEHTÄVÄ J2 Määritä origon suurin ja pienin etäisyys käyrästä

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1.$$

Ratkaisu: $(a > 0, b > 0)$ $\sqrt[4]{a^2 + b^2}$, $\min\{a, b\}$.

TEHTÄVÄ K1 Etsi funktion $f(x, y, z) = xy^2z^3$ maksimi ja minimi pallolla $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$.

TEHTÄVÄ K2 Suorakulmaisen, kannettoman laatikon tilavuus olkoon V kuutiota. Laatikko valmistetaan kahdesta materiaalista s.e. pohjan ja etulevyn materiaali on hinnaltaan viisinkertainen takalevyn ja kahden jäljelle jäävän sivun materiaaliin verrattuna. Mitkä laatikon mitat minimoivat materiaalikustannukset?

Haaste

Tässä tehtävässä gradienttia ∇f käsitellään pystyvektorina. Yksittäisen osittaisderivaatan arvo kuten $f_x(x_0, y_0)$ riippuu (yleensä) koordinaatiston valinnasta. Osoita, että gradientti ∇f on koordinaatistosta riippumaton suure seuraavassa mielessä ($n = 2$): Olkoon A ortogonaalinen 2×2-matriisi, ts. $A^T A = I$ (eli kierto, jos lisäksi $\det A = +1$) ja

$$F(\mathbf{x}) = f(A\mathbf{x}) = f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y).$$

Tällöin

$$A\nabla F(\mathbf{x}) = \nabla f(A\mathbf{x}).$$

Vihje: Aloita laskemalla F_x ja F_y. Huomaa lisäksi, että oikealla puolella lasketaan vektorin ∇f arvo pisteessä Ax.
Huom: Vastaava päättely toimii tietysti kaikissa dimensioissa.