



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Moring

Harjoitukset, Viikko 6, 2021



---

Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita. Haastetehtävät ovat yleisön pyynnöstä lisättyjä tehtäviä iltojen iloksi. Niitä ei varsinaisesti käsitellä harjoituksissa ellei ryhmä niin erikseen halua.

## Alkuviikko

**TEHTÄVÄ M1** Sovitetaan positiivinen mittausdata  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , käyrälle  $y = Kx^s$ . Etsi vakiot  $K$  ja  $s$ .

**Ratkaisu:** Ota ensin logaritmit! Pienimmän neliösumman minimointi on ei-triviaali! Tämä on perustelu sille, miksi tieteellisessä kirjallisuudessa logaritmiset kuvaajat ovat niin yleisiä.

**TEHTÄVÄ M2** Kirjoita Newtonin menetelmä systeemille

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0, \quad h(x, y, z) = 0.$$

(Käytä tätä K2:ssa!)

**TEHTÄVÄ J1** Sovita paraabeli  $y = p + qx^2$  mittausdataan  $(x_i, y_i) = (1, 0.11), (2, 1.62), (3, 4.07), (4, 7.55), (6, 17.63), (7, 24.20)$ . Arvioi mahdollista mittaustulosta, kun  $x = 5$ .

**TEHTÄVÄ J2** Muodosta Newtonin menetelmän mukainen matriisi-muotoinen iteraatiokaava yhtälöparille

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 2xy^5, \\ x^6 + x^2 + y^4 = 4. \end{cases}$$

Etsi tämän avulla yksi yhtälöparin kaikkiaan neljästä (reaalisesta) ratkaisusta.

**TEHTÄVÄ K1** Approksimoi pienimmän neliösumman integraalimuodon avulla funktiota  $f(x)$  summalla  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx$  yli välin  $x \in [0, \pi]$ .

**Ratkaisu:**  $a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos jx dx$ .

**TEHTÄVÄ K2** Etsi pintojen  $y^2 + z^2 = 3$ ,  $x^2 + z^2 = 2$  ja  $x^2 - z = 0$  leikkauspiste 1. oktantissa numeerisesti Newtonin menetelmällä. Matemaattisten ohjelmistojen käyttö on suositeltavaa.

**Ratkaisu:** Tarkka vastaus  $x = z = 1$ ,  $y = \sqrt{2}$ . Alkuarvauksella  $x_0 = y_0 = z_0 = 2$  menetelmän pitäisi olla kohtuullisen tarkka jo neljän askelen jälkeen.

## Loppuviikko

**TEHTÄVÄ M1** Jos mahdollista, vaihda muuttujien integroimisjärjestys integraalissa

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy.$$

Piirrä kuva!

**TEHTÄVÄ M2** Määritä tasointegraali  $\iint_A dA$ , missä  $A$  on suorakulmio  $-1 \leq x \leq 3$ ,  $-4 \leq y \leq 1$ .

**TEHTÄVÄ J1** Laske seuraavat integraalit:

- a)  $\iint_A x^2 da$ ,  $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$ ;  
b)  $\iint_A \frac{x}{y} da$ ,  $A = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ .

**Ratkaisu:** a)  $\frac{1}{3}$ ; b) 0.

**TEHTÄVÄ J2** Olkoon  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $A = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ . Laske epäoleellinen integraali

$$\iint_A e^{-(ax+by)^2} da$$

sijoituksella  $u = ax + by$ ,  $v = y/x$ .

**Ratkaisu:**  $\frac{1}{2ab}$ .

**TEHTÄVÄ K1** Olkoon  $V = \{ (x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1 \}$ .

**Laske a)**  $\int_V (1 - x - y)^5 dv$ , **b)**  $\int_V xyz^4 dv$ .

**Ratkaisu:** a)  $1/56$ ; b)  $1/15120$ .

**TEHTÄVÄ K2** Kolmion  $K$  kärkipisteet ovat  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$  ja  $(0, -1)$ . Laske tasointegraali

$$\iint_K 2x dA.$$

**Ratkaisu:** 1.

## Haaste

Tässä tehtävässä tarvitaan kaavaa

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t) dx;$$

kts. MS-A0101:n materiaali soveltuvin osin.

Laske integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

käyttämällä integraalin derivointia parametrin suhteen seuraavalla tavalla: Osoita, että funktion

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx$$

derivaatta on  $-1/(1+t^2)$ , joten  $F(t)$  voidaan laskea integroimalla, kun lisäksi tiedetään  $F(t) \rightarrow 0$ , kun  $t \rightarrow \infty$ . Tämän avulla saadaan  $F(0)$ .

Huom: Välivaiheet vaativat tarkempia perusteluja, koska kyseessä on epäoleellinen integraali. Vastaus on kuitenkin oikein, joten voit laskea ilman perusteluja (hieman kyseenalainen päättely?). Kurssilla MS-A0101 johdettiin (olennaisilta osin) kaava

$$\int_0^\infty e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \text{ kun } a < 0.$$