



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Moring

Harjoitukset, Viikko 7, 2021



Tehtävätyypeistä: Määritelmätehtävät M1 ja M2 esittelevät lempeästi peruskäsitteitä. Johdantotehtävät J1 ja J2 ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät K1 ja K2 palautetaan kurssin sivujen kautta ja tarkastetaan assistenttien toimesta ellei toisin mainita.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ M1 Määritä tasointegraali $\iint_A (x + 3) dA$, missä A on puoliliempyrä $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$.

TEHTÄVÄ M2 Määritä Pascalin simpukan $r = 2 + \cos \theta$ ja ympyrän $r = 1$ rajaaman alueen pinta-ala.

Ratkaisu: $7\pi/2$.

TEHTÄVÄ J1 Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat xy -tason yläpuolella pinnat

$$z = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0.$$

Ratkaisu: $\frac{1}{2}$.

TEHTÄVÄ J2 Laske muotoa $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ (a ja b vakioita) olevaa muunnosta käyttäen tasointegraali

$$\int_A \ln \left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right) da, \quad A = \{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 9x^2 + 4y^2 \leq 36 \}.$$

Ratkaisu: $3\pi(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

TEHTÄVÄ K1 Määritä tilavuus 1. oktantissa, jonka rajaavat sylinteri $x^2 + y^2 = a^2$ ja pinta $y = z$.

Ratkaisu: $a^3/3$.

TEHTÄVÄ K2 Laske integraali

$$\iint_A (x + 2y)^4 (x - 2y)^6 dx dy,$$

kun integroimisjoukkona on tasoalue $A = \{ (x, y) \mid |x+2y| \leq 1, |x-2y| \leq 2 \}$.

Ratkaisu: $128/35$.

Loppuviikko

Poikkeuksellisesti jaossa on neljä johdantotehtävää, joita voi käyttää integroinnin kertauksena. Kotitehtävät on erikseen ilmoitetulla tavalla korvattu kahdella Stack-tehtävällä.

TEHTÄVÄ M1 Taso $2x + y + z = 2$ leikkaa suorakulmaisen suuntais-särmiön $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$, kahteen osaan, joista origon sisältävä on integroimisalue D . Määritä D :n tilavuus ja keskiön koordinaatti \bar{z} .

Ratkaisu: $7/12, 11/28$.

TEHTÄVÄ M2 Kappale S muodostuu 1. oktantissa sijaitsevista pisteistä (x, y, z) jotka lisäksi toteuttavat ehdot $x + y + 2z \leq 2$ ja $y + z \leq 1$. Määritä S :n tilavuus ja keskiön koordinaatti \bar{x} .

Ratkaisu: $1/2, 7/12$.

TEHTÄVÄ J1 Käyrät $y = x^k$ ja $x = y^k$ ($k > 0, k \neq 1$) rajoittavat tasoalueen ensimmäisessä neljänneksessä. Laske tämän keskiö. Miten keskiö käyttäytyy, kun $k \rightarrow \infty$?

Ratkaisu: $X = Y = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(k+2)}$; $(X, Y) \rightarrow (1/2, 1/2)$ kun $k \rightarrow \infty$.

TEHTÄVÄ J2 Ympyräalueen neljännekselle $\{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R \}$ on levitetty massa, jonka pintatiheys on $\rho(x, y) = x$. Etsi massakeskipiste.

Ratkaisu: $(\frac{3\pi}{16}R, \frac{3}{8}R)$.

TEHTÄVÄ J3 Olkoon $k > 0$. Määritä tasoalueen

$$G = \left\{ (x, y) \mid x^4 < y < \frac{kx^2 + 1}{k + 1} \right\}$$

keskiö ja tutki, millä parametrin k arvoilla se ei kuulu alueeseen G .

Ratkaisu: $(0, \frac{k^2+5k+10}{3(k+1)(k+6)})$; $(X, Y) \notin G$, kun $k \geq 2$.

TEHTÄVÄ J4 Pyramidissa, jota reunustavat tasot $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, on massatiheys $\rho(x, y, z) = z$. Laske massakeskipiste. Oletetaan $a > 0$.

Ratkaisu: $(a/5, a/5, 2a/5)$.

Haaste

Etsi R -säteisen ympyräkuvion hitausmomentti keskipisteen suhteen.