MS-A0201 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM) Luento 4: Ketjusäännöt ja lineaarinen approksimointi

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos[1]
Aalto-yliopisto

Kevät 2021

[1] Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

Motivaatio

- Yleistetään derivoinnin ketjusääntö

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

  usean muuttujan funktioille f.
- Voidaan ajatella fysikaalista suuretta kuten lämpötilaa, mekaanisen systeemin kokonaisenergiaa, jotka riippuvat useista eri toissijaisista muuttujista (kuten ajasta, paikasta, tai nopeudesta).
- Nämä muuttujat voivat riippua edelleen kolmansista muuttujista (paikka ja nopeus esimerkiksi ajasta).
- Halutaan tarkastella kiinnostavan fysikaalisen suureen muutosnopeutta mainittujen kolmansien muuttujien suhteen.

Esimerkki 1 1/2

- Retkeilijä liikkuu karttaa käyttäen mäkisessä maastossa. Olkoon (x, y) retkeilijän paikka kartalla ja $z = f(x, y)$ kulloinenkin korkeus meren pinnasta.
- Olkoon
$$\mathbf{r}(t) = \big(u(t), v(t)\big)$$
retkeilijän paikka kartalla hetkellä t.
- Retkeilijän paikan korkeus eli etäisuus meren pinnan tasosta hetkellä t on siis yhdistetty funktio
$$z = f\big(u(t), v(t)\big) = g(t).$$
- Kuinka nopeasti retkelijän paikan korkeus muuttuu ajan kuluessa?

Esimerkki 1 2/2

- Ilmeisestikin vastaus kysymykseen on funktion $g(t)$ derivaatta. Lasketaan:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h)-g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t+h))}{h} \\ & + \lim_{h\to 0} \frac{f(u(t), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h} \end{aligned}$$

- Yhden muuttujan ketjusäännön perusteella

$$g'(t) = f_1\big(u(t), v(t)\big)\, u'(t) + f_2\big(u(t), v(t)\big)\, v'(t).$$

Ketjusäännöt 1/3

Olkoon z muuttujien x, y jatkuvasti derivoituva funktio (eli funktio, jolla on jatkuvat 1. kertaluvun osittaisderivaatat).

- Jos x, y ovat muuttujan t jatkuvasti derivoituvia funktioita, niin

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

- Jos x, y ovat kahden muuttujan s, t jatkuvasti derivoituvia funktioita, niin

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ketjusäännöt 2/3

Keskeisiä kysymyksiä:

- Mikä on yleinen idea näissä kaavoissa?
- Kuinka voidaan muodostaa yleisessä tapauksessa laskentakaava yhdistetyn funktion (osittais)derivaatoille?

Ajatellaanpa, että $z = f(u, v, t)$, jossa $u = u(x, y)$ ja $v = v(y, t)$. Tarkastellaan graafina "infinitesimaalisen muutoksen etenemistä" muuttujasta t muuttujaan z kaikkien etenemisreittien kautta.

- Piirrä muuttujien väliset riippuvuudet graafiksi, ja kirjoita sen perusteella kaava osittaisderivaatalle $\frac{\partial z}{\partial t}$!
- Kuinka tilanne muuttuu, jos lisäksi $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ jolloin $z = z(t)$ ja kysytään kaavaa derivaatalle $\frac{dz}{dt}$?

Ketjusäännöt 3/3

Saadaan

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

ja

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial f}{\partial t},$$

jossa on yhteensä viisi termiä.

Huomaa, että on käytetty sekä notaatiota $\frac{\partial z}{\partial t}$ että $\frac{\partial f}{\partial t}$, jotka tarkoittavat eri asiaa!

Esimerkki 2 1/2

- Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva. Etsitään

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x^2 y, x + 2y) \text{ ja } \frac{\partial}{\partial y} f(x^2 y, x + 2y).$$

- Saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x^2 y, x + 2y) &= f_1(x^2 y, x + 2y) \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) \\ &\quad + f_2(x^2 y, x + 2y) \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y) \end{aligned}$$

$$= 2xy f_1(x^2 y, x + 2y) + f_2(x^2 y, x + 2y).$$

Esimerkki 2 2/2

- Vastaavasti voidaan laskea

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} f(x^2 y, x+2y) &= f_1(x^2 y, x+2y)\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) \\ &\quad + f_2(x^2 y, x+2y)\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)\end{aligned}$$

$$= x^2 f_1(x^2 y, x+2y) + 2 f_2(x^2 y, x+2y).$$

Esimerkki 3 1/3

- Lämpötila ilmakehässä ($^\circ$ C) riippuu paikasta (x, y, z) sekä ajasta t. Ajatellaan lämpötilaa näistä parametreista riippuvana funktiona $T(x, y, z, t)$.

(a) Jos funktio T esittää sääpalloon liitetyn lämpömittarin mittaamaa lämpötilaa, määritetään T:n muutos ajan suhteen.

(b) Määritetään lämpötilan muutos hetkellä $t = 1$, kun

$$T(x, y, z, t) = \frac{xy}{1+z}(1+t),$$

ja sääpallo etenee reittiä $\mathbf{r}(t) = (t, 2t, t - t^2)$.

Esimerkki 3 2/3

(a) Koska lämpömittarin lukeman muutos riippuu kaikista neljästä parametrista, mitään niistä ei voida jättää huomiotta.

Lämpötilan muutoksen kaavaksi saadaan siten

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

(b) Koordinaattifunktioiden arvot hetkellä $t = 1$ ovat

$$x = 1, \quad y = 2 \text{ ja } z = 0.$$

Koordinaattifunktioiden derivaattojen arvot hetkellä $t = 1$ ovat

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ ja } \frac{dz}{dt} = -1.$$

Esimerkki 3 3/3

Siten hetkellä $t = 1$ saadaan

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{y}{1+z}(1+t) = 4, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{1+z}(1+t) = 2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-xy}{(1+z)^2}(1+t) = -4, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{xy}{1+z} = 2.$$

Näin ollen,

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1} = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + 2 = 14.$$

Lineaariset approksimaatiot

- Yksiulotteisessa tapauksessa muotoa $y = f(x)$ olevan funktion kuvaajan tangenttisuora $L(x)$ pisteessä a saadaan kaavasta

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- Tangenttisuoran lauseke antaa myös tavan approksimoida funktiota f pisteen a lähellä: $f(x) \approx L(x)$.

Miksi approksimaatiota tarvitaan, jos kerran tietokone voi laskea nopeasti ja tarkasti?

- Kun halutaan löytää “peukalosääntö” päässälaskun helpottamiseksi ja ymmärryksen lisäämiseksi.
- Kun funktio f on olemassa ainoastaan taulukoituna, esimerkiksi mittaustuloksista.

Lineaariset approksimaatiot usean muuttujan funktioille

Tapauksessa $n = 2$ saadaan funktiota $f(x, y)$ approksimoiva tangenttitaso $L(x, y)$, joka voidaan laskea osoittaisderivaattojen avulla kaavasta

$$f(x, y) \approx L(x, y) = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).$$

Vieläkin useamman muuttujan tapauksessa saadaan ihan samannäköinen kaava, joskin enemmän osittaisderivaattatermejä.

Esimerkki 6 1/2

- Etsitään lineaarinen approksimaatio funktiolle

$$f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$$

  pisteessä $(2,0)$, ja arvioidaan funktion arvoa pisteessä $(2.2,-0.2)$.
- Saadaan $f(2,0) = 3$.
- Funktion osittaisderivaatat ovat

$$f_1(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}, \quad f_1(2,0) = \frac{4}{3}.$$

$$f_2(x,y) = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}, \quad f_2(2,0) = \frac{1}{3}.$$

Esimerkki 6 2/2

- Siten
$$L(x, y) = 3 + \frac{4}{3}(x - 2) + \frac{1}{3}(y - 0).$$
- Haluttu approksimaatio siis on
$$f(2.2, -0.2) \approx L(2.2, -0.2) = 3 + \frac{4}{3}(2.2 - 2) + \frac{1}{3}(-0.2 - 0) = 3.2.$$
- Vertailun vuoksi funktion $f(x, y)$ todellinen arvo pisteessä $(2.2, -0.2)$ on noin 3.2172.

Huomautuksia

- Toisin kuin yksiulotteisessa tapauksessa pelkkä osittaisderivaattojen olemassaolo ei riitä takaamaan edes funktion $f(x, y)$ jatkuvuutta.
- **Esim.**
$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0 \text{ tai } y = 0, \\ 1, & \text{muuten.} \end{cases}$$
- **Esim.**
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{kun } x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
- Siksi tilannetta on tarpeen analysoida tarkemmin. Halutaan ehto, joka kertoo milloin tangenttitaso $L(x, y)$ on mielekäs approksimaatio funktiolle $f(x, y)$ pisteen (a, b) lähellä.

Differentioituvuus

- Funktiota $f(x, y)$ sanotaan differentioituvaksi pisteessä (a, b), jos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - h\, f_1(a, b) - k\, f_2(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

- Saadaan seuraava tulos:

Lause

Jos f_1, f_2 ovat jatkuvia jossakin pisteen (a, b) ympäristössä, niin f on differentioituva pisteessä (a, b).

Esimerkki 7

- Lasketaan virhetermi $f(x+h,y+k)-f(x,y)-h\,f_1(x,y)-k\,f_2(x,y)$, kun $f(x,y)=x^3+xy^2$.
- Osittaisderivaatoiksi saadaan $f_1(x,y)=3x^2+y^2$ ja $f_2(x,y)=2xy$.
- Saadaan

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)-h\,f_1(x,y)-k\,f_2(x,y)$$

$$=(x+h)^3+(x+h)(y+k)^2-x^3-xy^2-(3x^2+y^2)h-2xyk$$

$$=3xh^2+h^3+2yhk+hk^2+xk^2.$$

- Lausekeen h- ja k-termit lähestyvät nollaa samalla nopeudella kuin h^2+k^2, kun $(h,k)\to 0$, joten differentioituvuuden määritelmä selvästi toteutuu.