MS-A0201
Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
Luento 10: Muuttujanvaihto
Napa-, sylinteri- ja pallokoordinaatistot

Harri Hakula

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos[1]
Aalto-yliopisto

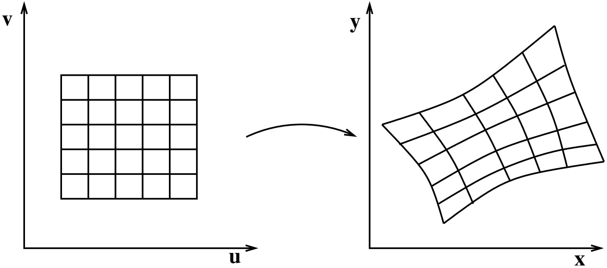
Kevät 2021

[1] Perustuu Antti Rasilan luentomonisteeseen vuodelta 2015 sekä Jarmo Malisen versioon vuodelta 2017.

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 1/5

Tutkitaan funktiota $\mathbf{F}\colon G \to D$, missä D ja G ovat $\mathbb{R}^2$:n osajoukkoja. Oletetaan, että funktion $\mathbf{F}$ kaikki osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia.

Lisäksi oletetaan, että $\mathbf{F}$ on bijektio: Jokaista pistettä $(x, y) \in D$ vastaa yksikäsitteinen piste $(u, v) \in G$, jolle $\mathbf{F}(u, v) = (x, y)$. Tällöin erityisesti $D = \mathbf{F}(G)$.



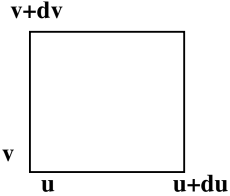
$$\big(x(u, v), y(u, v)\big) = \mathbf{F}(u, v).$$

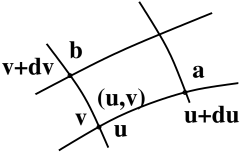
Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 2/5

Tutkitaan aluksi muuttujanvaihtoa tasointegraalin tapauksessa:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G ???\,du\,dv.$$

Tarvitaan tieto siitä, miten pinta-ala skaalautuu funktiossa $(x,y) = \mathbf{F}(u,v)$.





Kuvassa **a** (vast. **b**) sijaitsee käyrällä, jolla v (vast. u) on vakio. Koska funktiolla **F** on jatkuvat osittaisderivaatat, käyrät ovat sileitä.

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 3/5

Ketjusäännöllä

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \text{ ja } dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv.$$

Edettäessä vektorin **a** suuntaan (x, y)-koordinaateissa, koordinaatti v on vakio ja siten $dv = 0$. Saadaan

$$\mathbf{a} \approx \frac{\partial x}{\partial u} du\, \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du\, \mathbf{j}.$$

Samaan tapaan voidaan päätellä, että

$$\mathbf{b} \approx \frac{\partial x}{\partial v} dv\, \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} dv\, \mathbf{j}.$$

Tässä **i** ja **j** ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset yksikkövektorit.

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 4/5

Approksimaatiokaava pinta-alaelementin dA muutokselle siis on

$$dA = dx\,dy \approx |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \end{matrix} \right\|$$

Käytetään merkintää (huom. neliömatriiseille $\det A = \det A^T$)

$$\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du\,dv := \Big| \det D\mathbf{F}(u, v) \Big|\, du\,dv.$$

Determinantti $\det D\mathbf{F}(u, v)$ on funktion $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Jacobin determinantti. Sille käytetään myös merkintää

$$\det D\mathbf{F}(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \text{ kun } (x, y) = \mathbf{F}(u, v).$$

Muuttujanvaihto taso- ja avaruusintegraaleissa 5/5

Jacobin determinantin itseisarvo $|\det D\mathbf{F}(u,v)|$ kertoo *paikallisen* pinta-alan muutoksen kuvattaessa (u,v)-koordinaattien infinitesimaalinen pinta-ala *dudv* vastaavalle (x,y)-koordinaateissa lausutulle pinta-alalle *dxdy* funktion $(x,y) = \mathbf{F}(u,v)$ välityksellä.

Tasointegraalin muuttujanvaihtokaavaksi siis saadaan

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G g(u,v)\big|\det D\mathbf{F}(u,v)\big|\,du\,dv$$

missä $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ ja $D = \mathbf{F}(G)$.

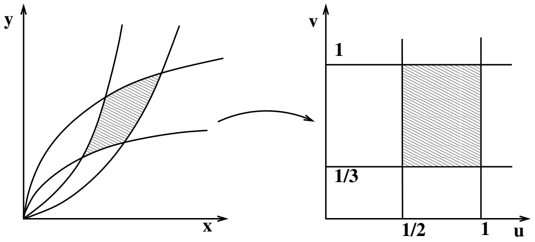
- Tässä $\mathbf{F}$ on integroimisalueiden D ja G välinen bijektio.
- Jacobin determinantin etumerkki kertoo, onko $\mathbf{F}$ suunnistuksen säilyttävä vai kääntävä. Itseisarvo tarvitaan, jotta positiivisen funktion integraali ei muuttuisi negatiiviseksi eräillä $\mathbf{F}$.

Esimerkki 2 1/3

Lasketaan neljän paraabelin $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ ja $x = 3y^2$ rajoittamaan alueen D pinta-ala.

Huomataan, että integroimisalue kuvautuu suorakulmioksi $G = [1/2, 1] \times [1/3, 1]$ muunnoksella

$$\mathbf{G}(x, y) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}, \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y}, \; v(x, y) = \frac{y^2}{x}.$$



Suorakulmion yli on paljon helpompi integroida.

Esimerkki 2 2/3

Halutaan kuitenkin käänteiskuvaus $\mathbf{F} = \mathbf{G}^{-1} \colon G \to D$, joka vie koordinaatit (u, v) käyräviivaisille (x, y)-koordinaateille.

Lineaarialgebran perusteella

$$\det D\mathbf{F}(u, v) = \frac{1}{\det D\mathbf{G}(x, y)}.$$

Lasketaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Saadaan myös

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2y}{x}.$$

Esimerkki 2 3/3

Lasketaan edelleen

$$\det D\mathbf{G}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 1 = 3, \text{ eli } \left|\det D\mathbf{F}(u,v)\right| = \frac{1}{3}.$$

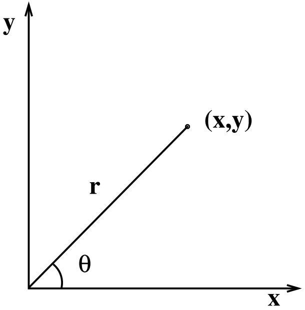
Tulokseksi siis saadaan

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \iint_G \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

Yleensä ei käy niin onnellisesti, että sama koordinaatistomuunnos vie integroitavan alueen suorakulmiolle samalla kun integroitava funktio menee vakioksi.

Napakoordinaatit 1/2

Piste $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ voidaan kirjoittaa muodossa (r, θ), missä $r \geq 0$ ja $0 \leq \theta < 2\pi$. Napakulma θ on yksikäsitteinen jos $r > 0$.



Alkeisgeometriasta saadaan kaavat

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = y/x. \end{cases}$$

Vrt. kompleksiluvun polaarimuoto $x + iy = re^{i\theta}$.

Napakoordinaatit 2/2

Koordinaatistomuunnoksen $(r,\theta) \mapsto (x,y)$ Jacobin determinantille saadaan kaava

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Siten muuttujanvaihtokaavaa varten saadaan pinta-alan venytys

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta.$$

Piirrä kuva!

Tasointegraali napakoordinaateissa

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G g(r,\theta) r\,dr\,d\theta,$$

missä $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Esimerkki 1

Olkoon $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.
Lasketaan napakoordinaateissa integraali

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy.$$

Saadaan

$$I = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_1^2 \frac{dr}{r}$$

$$= 2\pi \ln r \Big|_{r=1}^{2} = 2\pi \ln 2.$$

Esimerkki 2 1/2

- Integraali
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$
on erittäin tärkeä mm. todennäköisyyslaskennassa ja tilastotieteessä.
- Tämä integraali on vaikea, koska integraalifunktiota ei ole mahdollista kirjoittaa alkeisfunktioiden avulla.
- Integraali on kuitenkin mahdollista laskea seuraavan tempun avulla: Huomataan aluksi, että
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2.$$

Esimerkki 2 2/2

Laskemalla epäoleellinen tasointegraali napakoordinaateissa

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\infty} re^{-r^2} \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} \, dr = -\pi \lim_{R \to \infty} \int_0^R (-2r)e^{-r^2} \, dr$$

jossa viimeinen askel on ovela.

Nyt $\frac{d}{dr} e^{-r^2} = -2re^{-r^2}$, joten integraali saadaan analyysin peruslauseella antiderivaatan hypystä integroimisvälillä:

$$\int_0^R (-2r)e^{-r^2} \, dr = e^{-R^2} - 1$$

Viemällä $R \to \infty$ tulee $I = \pi$ ja siitä alkuperäisen integraalin arvo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{I} = \sqrt{\pi}.$$

Miksi temppu toimi?

Muuttujanvaihto avaruusintegraalissa (kertaus)

- Muunnoskaavat $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w). \end{cases}$$

- Tällöin

$$dx\,dy\,dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw,$$

missä

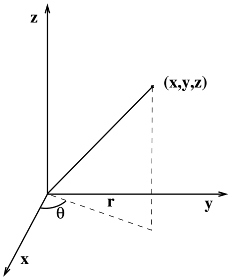
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

- Jos siis $g(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, niin

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G g(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw.$$

Sylinterikoordinaatit 1/2

Koordinaatit (r, θ, z), missä $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$. Suoralla $r = 0$ (eli z-akselilla) napakulma θ ei ole yksikäsitteinen.



Sylinterikoordinaateissa on helppo esittää pyörähdyskappaleita z-akselin ympäri muodossa

$$r = f(z), \quad \text{jossa} \quad z \in [a, b] \text{ ja } \theta \in [0, 2\pi),$$

missä f on ei-negatiivinen funktio.

Sylinterisymmetriset tehtävät!

Sylinterikoordinaatit 2/2

Muunnoskaavat $(r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Muunnoksen Jacobin determinantiksi saadaan

$$dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}\right| dr\,d\theta\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Esimerkki 3

Lasketaan funktion f määräämän pyörähdyskappaleen Ω tilavuus

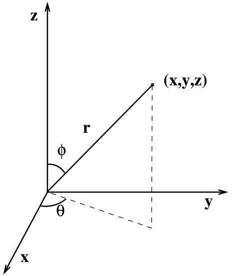
$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^{f(z)} r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \int_a^b \left(2\pi \cdot \frac{1}{2} f(z)^2\right)\,dz = \pi \int_a^b f(z)^2\,dz,$$

mikä lienee tuttu kaava.

Pallokoordinaatit 1/2

Koordinaatit (r, θ, ϕ), missä $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$.



Kulmaa $\pi/2 - \phi$ kutsutaan korotus- eli napakulmaksi, ja sitä käytetään usein ϕ:n sijasta.

Atsimuuttikulma θ ja korotuskulma ovat yksikäsitteisiä jos pisteen etäisyys z-akselista > 0.

Pallosymmetriset ja eräät sylinterisymmetriset tehtävät!

Pallokoordinaatit 2/2

Muunnoskaavat:

$$\begin{cases} x &= r\sin\phi\cos\theta, \\ y &= r\sin\phi\sin\theta, \\ z &= r\cos\phi. \end{cases}$$

Muunnoksen Jacobin determinantiksi saadaan

$$dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| dr\,d\theta\,d\phi = r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

Esimerkki 4

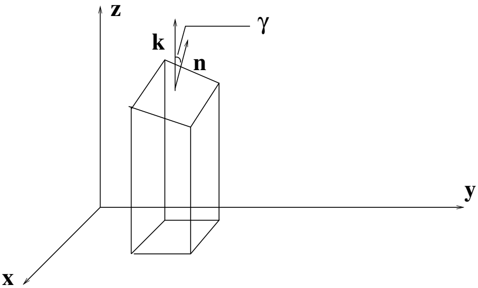
Lasketaan R-säteisen pallon $\mathbb{B}^3(R)$ tilavuus:

$$\iiint_{\mathbb{B}^3(R)} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\phi\,d\phi\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} -r^2 \cos\phi \Big|_{\phi=0}^{\pi} d\theta\,dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^R 4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi r^3}{3}\Big|_{r=0}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 1/3



- Tutkitaan kaksiulotteista kaareutuvaa pintaa S, joka on (piirtämisen helpottamiseksi) xy-tason yläpuolella avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
- Tarkastellaan aluksi xy-tason neliön yläpuolelle jäävän osan pinta-alaa. Se on ilmeisesti suurempi tai yhtäsuuri kuin vastaavan neliön pinta-ala.

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 2/3

- Tästä johtuen pinta-aladifferentiaali dS on suurempi tai yhtäsuuri kuin kuin $dx\,dy$. Itseasiassa $dx\,dy$ saadaan, jos dS projisoidaan xy-tasoon.
- Projektio voidaan kirjoittaa kaavana

$$dx\,dy = \cos\gamma\, dS,$$

missä γ on pinnan S normaalivektorin $\mathbf{n}$ ja z-akselin suuntaisen yksikkövektorin $\mathbf{k}$ välinen kulma.
- Toisaalta pistetulon määritelmästä saadaan

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} = \|\mathbf{n}\|\|\mathbf{k}\|\cos\gamma,$$

ja siis

$$dS = \frac{1}{\cos\gamma}\, dx\,dy = \frac{\|\mathbf{n}\|\|\mathbf{k}\|}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}\, dx\,dy.$$

Kaksiulotteinen pinta-ala avaruudessa 3/3

- Aikaisemmin on johdettu pinnan (ylöspäin suunnatulle) normaalivektorille esitys

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

- Saadaan

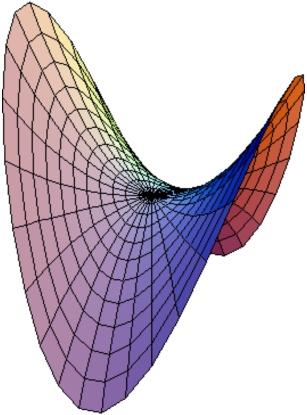
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

- Lisäksi $\|\mathbf{k}\| = 1$ ja $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 1$, joten

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Kaarevuuden huomioiva korjaustekijä yleistää tasointegraalin pintaintegraaliksi.

Esimerkki 5 1/3



- Tarkastellaan sylinterin $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ leikkaamaa palasta hyperbolisesta paraboloidista $z = x^2 - y^2$. Mikä on palasen pinta-ala?

Esimerkki 5 2/3

- Lasketaan

$$\frac{\partial}{\partial x} z = 2x, \qquad \frac{\partial}{\partial y} z = -2y.$$

- Siten pinta-aladifferentiaaliksi saadaan

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$= \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta,$$

napakoordinaateissa ilmaistuna.

Esimerkki 5 3/3

- Lasketaan nyt integraali napakoordinaateissa:

$$\mathrm{Ala}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^a r\sqrt{1+4r^2}\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^a 8r\sqrt{1+4r^2}\, dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \Big|_{r=0}^{a} \frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2} = \frac{\pi}{6}\big[(1+4a^2)^{3/2} - 1\big].$$