Onsdag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast onsdag kl. 08:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast fredag kl. 12:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)

HA1. Knatte, Fnatte och Tjatte spelar ett litet hasardspel med en vanlig tärning med ögon-antalen 1, 2, 3, 4, 5 resp. 6. Först kastar Knatte och om han får en 1:a, vinner han potten. I annat fall går turen till Fnatte. Om Fnatte då kastar en 2:a eller en 3:a, vinner han potten. I annat fall går turen till Tjatte. Om Tjatte då kastar en 4:a, 5:a eller 6:a, vinner han potten. I annat fall går turen till Knatte igen och spelet fortsätter som från början.
Om Fnatte lägger 1 euro i potten, hur mycket måste Knatte och Tjatte lägga dit för att spelet skall vara rättvist?

HA2. Bonden Pavo har 2 ankor, 3 gäss och 5 hönor. En natt bryter sig två vargar in i fågelgården och fångar varsin fågel. Antag att vargarna väljer fångsten slumpmässigt. Låt slumpvariabeln X stå för antalet ankor, Y för antalet gäss och Z för antalet hönor som Pavo förlorar.
a) Vad är frekvensfunktionen $f_{XZ}(x,z)$ för den 2-dimensionella diskreta slumpvariabeln (X,Z)?
b) Vad är mer sannolikt: att Pavo förlorar två hönor eller att han inte förlorar någon höna alls?

- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)

IA1. En urna innehåller 7 svarta och 4 vita kulor. Vi plockar ut kulor ur urnan utan återläggning tills vi får en svart kula. Låt den diskreta slumpvariabeln X vara antalet kulor vi plockar ut, så $X \in S = \{1,2,3,4,5\}$.
a) Bestäm frekvensfunktionen $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ för X. (Märk: $f_X(x) = 0$, om $x \notin S$.)
b) Beräkna väntevärdet $\mu_X = \mathbb{E}[X] = \sum_{x\in S} x \cdot f_X(x)$, variansen $\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \sum_{x\in S} x^2 \cdot f_X(x) - (\mathbb{E}[X])^2$ och standardavvikelsen $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ för X.

IA2. En kontinuerlig slumpvariabel T säges vara *exponential-fördelad* med parametern $\lambda > 0$ (beteckning: $T \sim Exp(\lambda)$), om T har täthetsfunktionen $f_T(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$ för $t > 0$ och $f_T(t) = 0$ för $t < 0$.
(Märk: $f_T(t) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)dt = 1$.)
Visa att dess väntevärde $\mu_T = \mathbb{E}[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_T(t)dt = \frac{1}{\lambda}$ och dess varians $\sigma_T^2 = Var(T) = \mathbb{E}[T^2] - (\mathbb{E}[T])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_T(t)dt - (\mathbb{E}(T))^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ ($\Rightarrow$ standardavvikelsen $\sigma_T = \frac{1}{\lambda}$).
(Partiell integrering och l'Hospitals regel från DiffInt1 kan vara till nytta.)
Beräkna även T:s median, dvs. värdet m sådan att $\mathbb{P}(T \leq m) = \frac{1}{2}$, nedre kvartil a sådan att $\mathbb{P}(T \leq a) = \frac{1}{4}$ samt övre kvartil b sådan att $\mathbb{P}(T \leq b) = \frac{3}{4}$.

Fredag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast söndag kl. 24:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)

HB1. Den kontinuerliga slumpvariabeln X har täthetsfunktionen $f_X(x) = a \cdot x^2$ för $-1 \leq x \leq 2$ och $f_X(x) = 0$ annars.
a) Bestäm värdet på a så att $f_X(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.
b) Beräkna fördelningsfunktionen $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ för X.
c) Beräkna väntevärdet $\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$ för X.
d) Beräkna medianen för X, dvs. värdet m sådant att $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$.
e) Beräkna variansen $\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx - (\mathbb{E}[X])^2$ och standardavvikelsen $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ för X.
f) Beräkna $\mathbb{P}(X^2 < 1)$.

HB2. Ett skumrask-företag säljer apparater, vilkas livslängder är exponential-fördelade med väntevärdet 10 månader. Företaget ger visserligen en garanti på 2 år (24 månader), men det står bara på kassakvittot, vars tryck bleknar bort fullständigt på 3 månader.
a) Beräkna sannolikheten för att en apparat går sönder inom 3 månader, så företaget kan bli tvunget att byta ut apparaten (för de har inga planer på att ge tillbaka några pengar!).
b) Beräkna sannolikheten för att en apparat håller den utlovade garantitiden på 2 år.

- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast söndag kl. 24:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)

IB1. En diskret slumpvariabel X med frekvensfunktionen $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-m} \cdot m^x}{x!}$ för $x \in S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (och $f_X(x) = 0$ annars), där $m > 0$, säges vara *Poisson-fördelad* med parametern m. Detta betecknas $X \sim Po(m)$.
Visa att $\mu_X = \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in S} x \cdot f_X(x) = m$ och $\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \sum_{x \in S} x^2 \cdot f_X(x) - (\mathbb{E}[X])^2 = m$ för Poisson-fördelningen. (Formeln $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ för alla $t \in \mathbb{R}$ från DiffInt1 kan vara till nytta. Likaså kan det till synes triviala påpekandet att $x^2 = x(x-1) + x$ vara till en viss hjälp.)

IB2. a) Antag att X_1 och X_2 är oberoende exponential-fördelade slumpvariabler:
$X_1 \sim Exp(\lambda_1), X_2 \sim Exp(\lambda_2)$; $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \iff X_1 \perp X_2$.
Slumpvariabeln $Y = \min\{X_1, X_2\}$.
Visa att även Y är exponential-fördelad och att $Y \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$ genom att bestämma Y:s fördelningsfunktion $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 1 - \mathbb{P}(Y > t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t \text{ och } X_2 > t) = \{\text{oberoende}\} = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t) \cdot \mathbb{P}(X_2 > t)$ och täthetsfunktion $f_Y(t) = F_Y'(t)$.
b) Visa mha. a)-delen och induktion att om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är oberoende exponential-fördelade slumpvariabler: $X_i \sim Exp(\lambda_i); \lambda_i > 0$ för $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; $f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{\text{ober.}\} = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$, så är även slumpvariabeln $Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ exponential-fördelad och att $Y \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$ för alla $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ange tydligt vilket induktions-antagande som görs samt var det används i beviset av induktionssteget.

- Temat för Stack-uppgifterna (som fås via länken på kursens hemsida i MyCourses och som skall vara attackerade senast söndag kl. 24:00 ifrågavarande vecka)
S1. Sannolikheter
S2. Sannolikhet mha. geometri
S3. Kontinuerlig slumpvariabel
S4. Väntevärde
S5. Väntevärde och standardavvikelse för en kontinuerlig slumpvariabel