Aalto University
School of Business

Talousmatematiikan perusteet: Luento 1

Korkolaskennan kertaus

Luennon sisältö

- Korkolaskennan kertaus
  - Koron lisääminen vuosittain
  - Koron lisääminen *m* kertaa vuodessa
  - Koron lisääminen jatkuvasti
  - Prolongointi vs. diskonttaus

Korkolaskennan kertaus

- Käsitteitä
  - Alkupääoma / pääoman nykyarvo: K_0
  - Korkokanta: $p\%$ (yl. vuodessa)
  - Pääoma t vuoden kuluttua: K_t
  - Pääoman suhteellinen muutos eli korkotekijä: $r = \frac{K_t}{K_0}$
  - Korko: $\Delta K = K_t - K_0$

Koron lisääminen vuosittain

- Jos korko p lisätään pääomaan vuosittain, on pääoma ajanhetkellä *t* (vuotta):

$$K_t = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t K_0 \rightarrow \quad r = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

- Rahastoon sijoitetaan 5 % vuosikorolla 20 000 €. Kuinka suureksi pääoma on kasvanut a) vuoden, b) kolmen vuoden kuluttua?

$$a) \; K_1 = 20000€ \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 21000€ \rightarrow \quad r = 1.05 \text{ ja } \Delta K = 1000€,$$

$$b) \; K_3 = 20000€ \cdot 1.05^3 = 23152.5€ \rightarrow \quad r = 1.1576 \text{ ja } \Delta K = 3152.5€.$$

Taukojumppa

- Kaapo lainaa pankilta 5000 € 2 % vuosikorolla ja maksaa koko velan takaisin 4.5 vuoden kuluttua. Kuinka suureksi velka on kasvanut?

1. 5100 €
2. 5412 €
3. 5466 €

Koron lisääminen *m* kertaa vuodessa

- Usein korkokanta p ilmoitetaan (nimellisenä) vuosikorkona, mutta korkoa lisätään pääomaan esim. kuukausittain

- Jos korko p/m lisätään pääomaan m kertaa vuodessa, on pääoma ajanhetkellä t (vuotta):

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^{tm} \rightarrow \quad r = \left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^{tm}$$

- Esim. Rahastoon sijoitetaan 5% vuosikorolla 20 000 € siten, että korko liitetään pääomaan kuukausittain. Paljonko rahaa on a) 4 kk:n, b) vuoden, c) 5.5 vuoden kuluttua?

$a)\quad m = 12,\ t = \frac{4}{12} \rightarrow tm = 4 \rightarrow K_{4/12} = 20000€ \cdot \left(1 + \frac{5/12}{100}\right)^{4} = 20335.42€$

$b)\quad m = 12,\ t = 1 \rightarrow tm = 12 \rightarrow K_1 = 20000€ \cdot \left(1 + \frac{5/12}{100}\right)^{12} = 21023.24€,$

$c)\quad m = 12,\ t = 5.5 \rightarrow tm = 66 \rightarrow K_{5.5} = 20000€ \cdot \left(1 + \frac{5/12}{100}\right)^{66} = 26315.57€.$

Taukojumppa

- Mari lainaa pankilta 3000 € 2 % vuosikorolla siten, että korkoa kerrytetään puolivuosittain. Kuinka suureksi velka on kasvanut 5.5 vuoden kuluttua?

1. 3345 €
2. 3347 €
3. 3730 €

Koron lisääminen jatkuvasti

- Kun vuosikorko on *p* ja korkoa lisätään jatkuvasti, korkotekijä *t* vuoden kuluttua maksettavalle pääomalle K_t on

$$r = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p/m}{100}\right)^{mt} = e^{\frac{pt}{100}} \quad\rightarrow\quad K_t = K_0 r = K_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

- Esim. Rahastoon sijoitetaan 5% vuosikorolla 20 000 € siten, että korko liitetään pääomaan jatkuvasti. Paljonko rahaa on a) 4 kk:n, b) vuoden kuluttua?

$$a)\quad t=\frac{4}{12} \rightarrow r = e^{\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{12}} \approx 1.0168 \rightarrow K_{4/12} = 20000€\cdot e^{\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{12}} = 20336.13€,$$

$$b)\quad t=1 \rightarrow r = e^{\frac{5}{100}} \approx 1.0513 \rightarrow K_1 = 20000€\cdot e^{\frac{5}{100}} = 21025.42€.$$

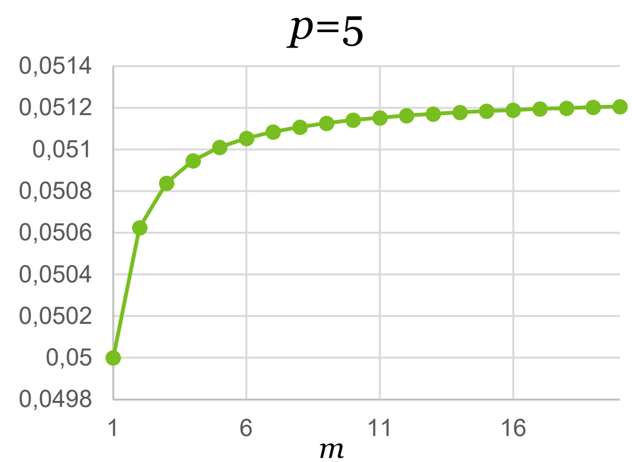
Taukojumppa

- Rahastoon sijoitetaan 4 % vuosikorolla 15 000 € siten, että korko liitetään pääomaan jatkuvasti. Paljonko rahaa on 5.5 vuoden kuluttua?

1. 18611 €
2. 18684 €
3. 18691 €

Nimellinen vs. efektiivinen korko

- 5% nimellistä vuosikorkoa käyttäen 20 000 €:n pääoma kasvoi vuodessa
  - $\frac{21023.24}{20000} - 1 = 5.12\%$, kun korkoa lisättiin kuukausittain
  - $\frac{21025.42}{20000} - 1 = 5.13\%$, kun korkoa lisättiin jatkuvasti
- Todellista pääoman kasvua kutsutaan *efektiiviseksi koroksi*



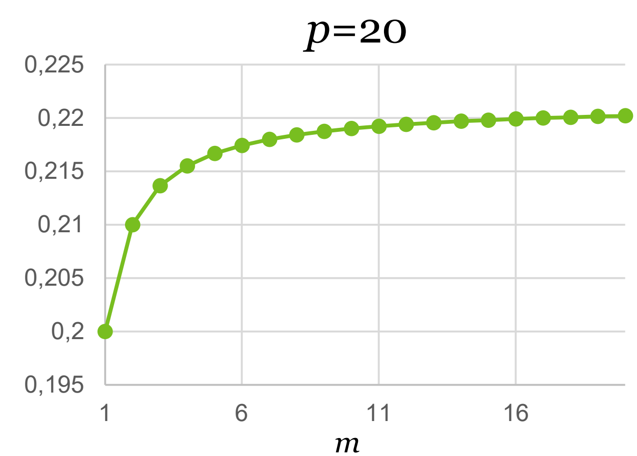
- Esim. Mikä nimellisen vuosikoron pitäisi olla, jotta efektiivinen vuosikorko olisi 5%, kun korkoa lisätään pääomaan kuukausittain?

$$K_1 = K_0\left(1 + \frac{p/12}{100}\right)^{12} = 1.05K_0 \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{p/12}{100}\right)^{12} = 1.05 \Leftrightarrow$$

Huom! $\sqrt[12]{1.05} = 1.05^{\frac{1}{12}}$
(yleisesti $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$)

$$p = 100 \cdot 12\left(\sqrt[12]{1.05} - 1\right) \approx 4.889$$



Taukojumppa

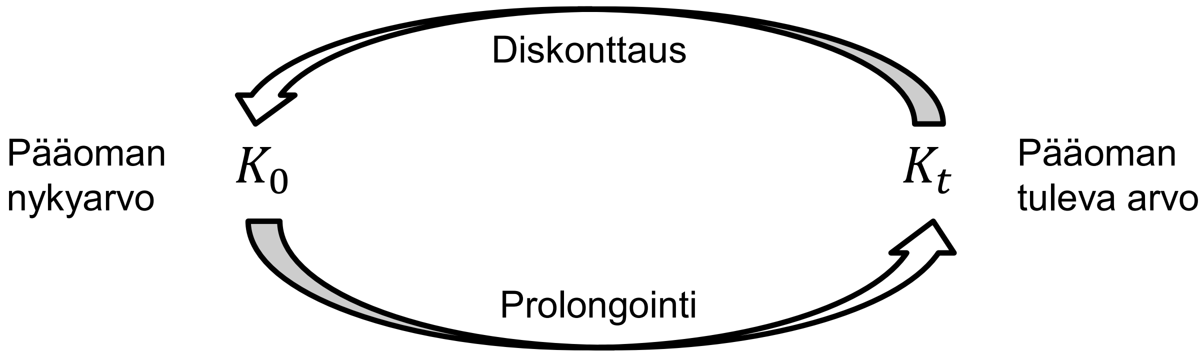
- Kaarina ottaa kolmen vuoden laina-ajalla 10 000 €:n jatkuvakorkoisen lainan, jonka nimellinen vuosikorko on 6 %. Mikä on lainan efektiivinen vuosikorko?
  1. 6.18 %
  2. 6.38 %
  3. 6.57 %

- Mikä on lainapääoman suuruus laina-ajan päätyttyä?
  1. 10 618 €
  2. 11 910 €
  3. 11 972 €

Diskonttaus

- Edellä on tarkasteltu *prolongointia* eli pääoman arvon kasvua koron johdosta nykyhetkestä tulevaisuuteen.
- *Diskonttaus* on käänteinen toimenpide prolongoinnille: mikä on pääoman arvon alenema tulevaisuudesta nykyhetkeen?

$$K_0 = dK_t = \frac{1}{r}K_t$$



r = korkotekijä
d = diskonttotekijä

$$K_t = rK_0 = \frac{1}{d}K_0$$

Prolongointi vs. diskonttaus

- Prolongointi
  - Pääoman tuleva arvo, kun nykyarvo tunnetaan:

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

$$K_t = K_0 \left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^{tm}$$

$$K_t = K_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

  - Pääoman suhteellinen muutos nykyarvosta tulevaan arvoon eli korkotekijä: $r = \frac{K_t}{K_0}$
  - Pääoman absoluuttinen muutos nykyarvosta tulevaan arvoon eli korko: $K_t - K_0$

- Diskonttaus
  - Pääoman nykyarvo, kun tuleva arvo tunnetaan:

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}$$

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1+\frac{p/m}{100}\right)^{tm}}$$

$$K_0 = K_t e^{\frac{-pt}{100}}$$

  - Pääoman suhteellinen muutos tulevasta arvosta nykyarvoon eli diskonttotekijä: $d = \frac{K_0}{K_t} = \frac{1}{r}$
  - Pääoman absoluuttinen muutos tulevasta arvosta nykyarvoon eli diskontto: $K_0 - K_t$

Diskonttaus, kun korkoa lisätään pääomaan kerran vuodessa

- Pääoman nykyarvo saadaan kaavalla

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t}$$

- Esim. On sovittu, että 5000 € korvaus maksetaan vuoden kuluttua. Kuinka suuri on kohtuullinen maksun arvon alennus (diskontto), jos korvaus maksetaankin a) heti, b) 4kk sovittua aikaisemmin, kun korkokanta on 6% vuodessa?

a) $t = 1\text{:}\ \ K_0 = \frac{5000€}{\left(1+\frac{6}{100}\right)^1} = \frac{5000€}{1.06} = 4716.98€$. Diskontto on $5000€ - K_0 = 283.02€$.

b) $t = \frac{4}{12}\text{:}\ \ K_0 = \frac{5000€}{\left(1+\frac{6}{100}\right)^{\frac{4}{12}}} = \frac{5000€}{1.019613} = 4903.82€$. Diskontto on $5000€ - K_0 = 96.18€$.

Diskonttaus, kun korkoa lisätään pääomaan *m* kertaa vuodessa

- Pääoman nykyarvo saadaan kaavalla

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^{tm}}$$

- Esim. Henkilö ostaa joukkovelkakirjan, joka takaa hänelle 20 000 € laina-ajan umpeutuessa. Nimellinen vuosikorko on 5%, ja korkoa lisätään lainapääomaan kuukausittain. Mikä on joukkovelkakirjan hinta (ts. nykyarvo), kun laina-aika on a) yksi vuosi, b) 4 kk?

$$a) \quad m = 12,\ t = 1:\ K_0 = \frac{20000€}{\left(1+\frac{5/12}{100}\right)^{1 \cdot 12}} = \frac{20000€}{1.051162} = 19026.56€\,.$$

$$b) \quad m = 12,\ t = \frac{4}{12}:\ K_0 = \frac{20000€}{\left(1+\frac{5/12}{100}\right)^{\frac{4}{12} \cdot 12}} = \frac{20000€}{1.016771} = 19670.11€\,.$$

Diskonttaus, kun korkoa lisätään pääomaan jatkuvasti

- Pääoman nykyarvo saadaan kaavalla

$$K_0 = K_t e^{\frac{-pt}{100}}$$

- Esim. Henkilö ostaa joukkovelkakirjan, joka takaa hänelle 20 000 € laina-ajan umpeutuessa. Nimellinen vuosikorko on 5%, ja korkoa lisätään lainapääomaan jatkuvasti. Mikä on joukkovelkakirjan hinta (ts. nykyarvo), kun laina-aika on a) yksi vuosi, b) 4 kk?

$$a) \quad t = 1: \; K_0 = 20000€ \cdot e^{\frac{-5\cdot 1}{100}} = 20000€ \cdot 0.951229 = 19024.59€\,.$$

$$b) \quad t = \frac{4}{12}: \; K_0 = 20000€ \cdot e^{\frac{-5\cdot 4/12}{100}} = 20000€ \cdot 0.983471 = 19669.43€\,.$$

Taukojumppa

- Vuoden 2019 jouluvararikosta viisastuneena Pekka päättää lainata Kallelle rahaa 3.1.2020 yhdeksitoista kuukaudeksi siten, että Kalle maksaa Pekalle 500 € 3.12.2020. Lainan nimellinen vuosikorko on 4 % ja korkoa kerrytetään kuukausittain. Mikä on Kallen saaman lainan suuruus?

1. 482.00 €
2. 482.03 €
3. 482.32 €

Yhteenveto korkolaskennasta

- Pääoman nykyarvon ollessa K_0 ja korkokannan p, pääoman arvo hetkellä t saadaan prolongoimalla $K_t = rK_0$, missä korkotekijä
  - $r = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, jos korko lisätään pääomaan vuosittain
  - $r = \left(1 + \frac{p/m}{100}\right)^{tm}$, jos korkoa lisätään pääomaan m kertaa vuodessa
  - $r = e^{\frac{pt}{100}}$, jos korkoa lisätään pääomaan jatkuvasti.

- Pääoman tulevan arvon ollessa K_t, pääoman nykyarvo saadaan diskonttaamalla $K_0 = dK_t$, missä diskonttotekijä $d = 1/r$.