Aalto University
School of Business

# Talousmatematiikan perusteet: Luento 2

*Lukujonot*
*Sarjat*
*Sovelluksia korkolaskentaan*

# Lukujonoista

**Miten jatkaisit seuraavia lukujonoja?**

1, 3, 5, 7,…

1, 2, 4, 8,…

1, 3, 9, 27,…

1, 1, 2, 3, 5, 8,…

# Lukujonoista

- ❑ *Lukujonoilla* voidaan kuvata monien taloudellisten ilmiöiden systemaattista kehittymistä.

- ❑ Esim. 20 000 € sijoitus 5% vuosikorolla voidaan esittää lukujonona

$$\underset{\text{1. v. alussa}}{20\,000}, \underset{\text{2. v. alussa}}{20\,000 \cdot 1.05}, \underset{\text{3. v. alussa}}{20\,000 \cdot 1.05^2}, \cdots, \underset{n\text{. v. alussa}}{20\,000 \cdot 1.05^{n-1}}$$

- ❑ Lukujono on päättyvä tai päättymätön jono reaalilukuja $a_1, a_2, \dots, a_n$, joita sanotaan jonon *termeiksi*.

- ❑ Joskus lukujono voidaan esittää *sääntönä* $(a_n)$

- ❑ Esim. Edellä $(a_n) = 20\,000 \cdot 1.05^{n-1}$.

# Aritmeettinen jono

- Jos lukujonon peräkkäisten termien **absoluuttiset erot** ovat yhtä suuria, jonoa kutsutaan ***aritmeettiseksi:***

$$a_{n+1} - a_n = d \qquad \forall n = 1,2, \ldots$$

- Esim. Opiskelija HH saa kotoa muuttaessaan 2000 € ja sen jälkeen kuukausittain 500 €. Kertynyttä rahamäärää kuvaa artimeettinen jono

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. kk alussa | 2. kk alussa | 3. kk alussa | | *n.* kk alussa |
| 2000, | 2000+500, | 2000+2·500, | … , | 2000+(*n*-1) ·500 |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | $a_n$ |

- Edellä $a_{n+1} - a_n = 2000 + n \cdot 500 - 2000 - (n-1) \cdot 500 = 500 = d$

- Aritmeettinen jono voidaan esittää sääntönä $(a_n) = a_1 + (n-1)d$

# Aritmeettinen jono: Esimerkki

- 10 000 € lainan vuosikorko on 16% ja sitä lyhennetään 500 € puolivuosittain
  - 20 kpl lyhennyksiä
  - Puolen vuoden korko 16%/2=8%
- Maksettavan 1., 2., 3., ja *n*. koron suuruutta kuvaa jono

| Lyhennys | 1 | 2 | 3 | … | n | … | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pääoma | 10000€ =<br>20·500€ | 9500€ =<br>19·500€ | 9000€ =<br>18·500€ | … | 10000€-<br>(n-1)·500€ | … | 1·500€ |
| Korko | 0.08·(20·500€)<br>=800€<br>=20·40€ | 0.08·(19·500€)<br>=760€<br>=19·40€ | 0.08·(18·500€)<br>=720€<br>=18·40€ | … | 800€-<br>(n-1)·40€ | … | 0.08·500€<br>=40€ |

- Jono on aritmeettinen: $(a_n) = 800€ - 40€ \cdot (n-1)$

→ $a_1 = 800€$ ja $d = -40€$.

# Geometrinen jono

- Esim. 20 000 € sijoitus 5% vuosikorolla voidaan esittää lukujonona

$$\underset{a_1}{\overset{\text{1. v. alussa}}{20\,000}},\ \underset{a_2}{\overset{\text{2. v. alussa}}{20\,000 \cdot 1.05}},\ \underset{a_3}{\overset{\text{3. v. alussa}}{20\,000 \cdot 1.05^2}}, \cdots, \underset{a_n}{\overset{n\text{. v. alussa}}{20\,000 \cdot 1.05^{n-1}}}$$

- Lukujono ei ole aritmeettinen, sillä

$$a_{n+1} - a_n = 20\,000 \cdot (1.05^n - 1.05^{n-1}) \neq \text{vakio}$$

- Sen sijaan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{20\,000 \cdot 1.05^n}{20\,000 \cdot 1.05^{n-1}} = 1.05 = \text{vakio}$$

- Jos lukujonon peräkkäisten termien **suhteelliset erot** ovat yhtä suuria, jonoa kutsutaan ***geometriseksi***

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \forall n = 1,2, \ldots$$

- Geometrinen jono voidaan esittää sääntönä $(a_n) = a_1 q^{n-1}$

# Geometrinen jono: Esimerkki

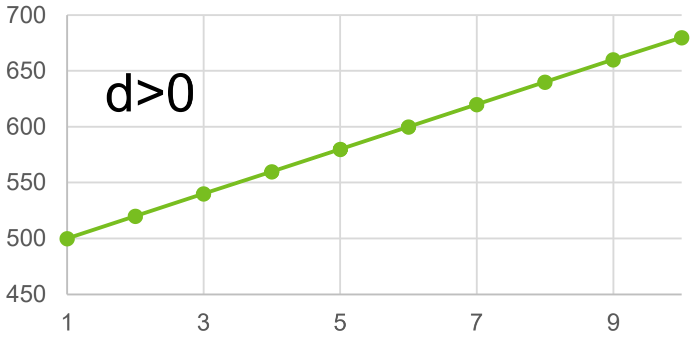
- 60 000 € hintaisen auton arvon arvellaan vähenevän aina 20% edellisen vuoden arvosta. Kunkin vuoden alussa jäljellä olevaa arvoa kuvaa jono:

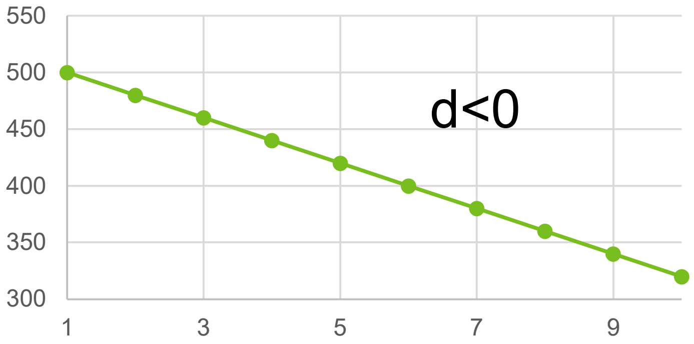
$$\underset{a_1}{\overset{\text{1. v. alussa}}{60\ 000}}, \underset{a_2}{\overset{\text{2. v. alussa}}{60\ 000 \cdot 0.8}}, \underset{a_3}{\overset{\text{3. v. alussa}}{60\ 000 \cdot 0.8^2}}, \cdots, \underset{a_n}{\overset{n\text{. v. alussa}}{60\ 000 \cdot 0.8^{n-1}}}$$

- Jono on geometrinen: $a_1 = 60\ 000€$ ja $q = 0.8$.

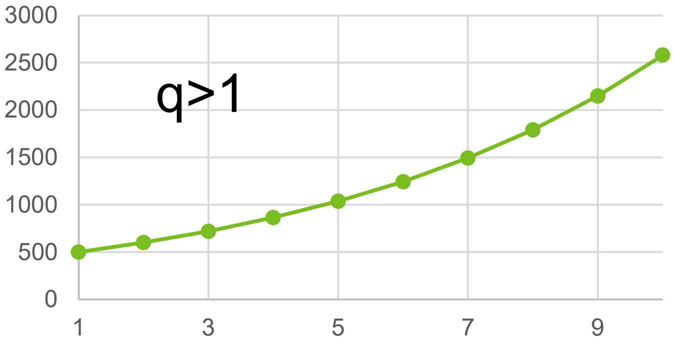
# Aritmeettinen vs. geometrinen jono

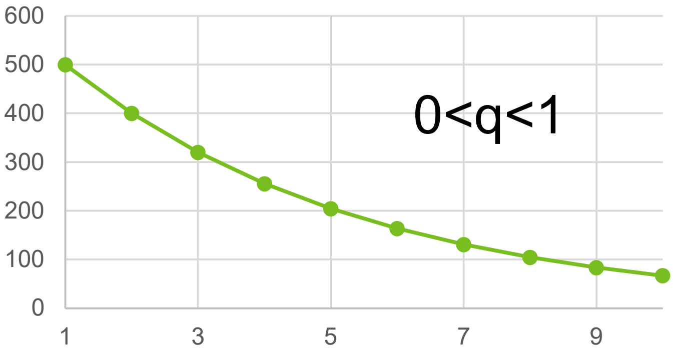
- Aritmeettinen jono kuvaa lineaarista muutosta





- Geometrinen jono kuvaa eksponentiaalista muutosta





Lauri Viitasaari (pohjaa Eeva Vilkkumaan ja Juha Heikkilän materiaaleihin)

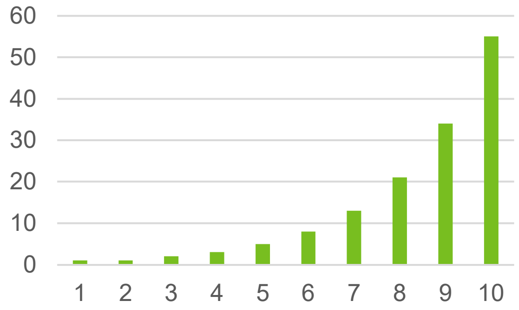
# Taukojumppa

Moottoriveneen hinta uutena on 150 000 €. Arvo alenee 20% vuodessa. Mikä on moottoriveneen arvo 3 vuoden kuluttua (eli 4. vuoden alussa)?

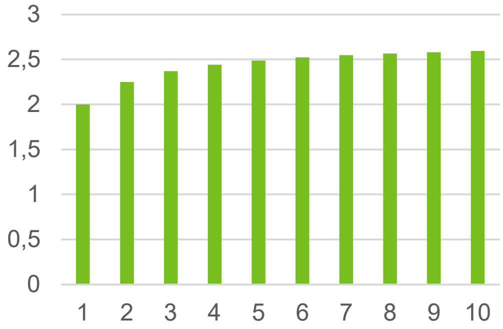
1. 60 000 €
2. 76 800 €
3. 86 806 €

# Muita esimerkkejä lukujonoista

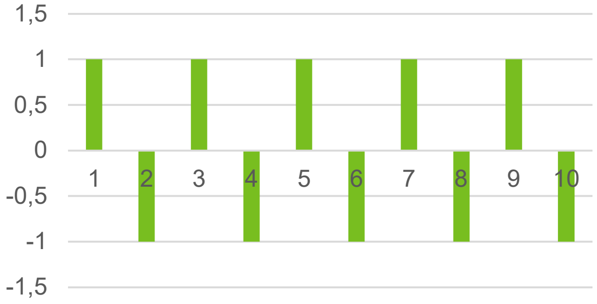
- $a_1 = a_2 = 1, \;\; a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \;\; \forall n \geq 3$ (Fibonaccin jono)



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$



- $a_1 = 1, a_2 = -1, a_n = a_{n-2} \forall n \geq 3$



# Lukujonon suppeneminen

- ☐ Lukujono suppenee, jos sen termit $a_n$ lähestyvät jotakin äärellistä lukua $a \in (-\infty, \infty)$, kun $n \to \infty$.
  - Esim. Geometrisen lukujonon termi $a_n = a_1 q^{n-1} \to 0$, jos $|q| < 1$.
  - Esim. Termi $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$.

- ☐ Jos lukujono ei suppene, se hajaantuu
  - Termi $a_n$ ei lähesty mitään arvoa (esim. Jono 1, -1, 1,-1…)
  - Termi $a_n$ lähestyy ääretöntä / miinus ääretöntä
    - ○ *Aritmeettinen jono, kun* $d \neq 0$
    - ○ *Geometrinen jono, kun* $|q| > 1$
    - ○ *Fibonaccin jono*

# Lukujonon suppeneminen

- ☐ Opiskelijan HH kerryttämä rahamäärä *n*. kuussa on $a_n = 2000€ + (n-1)500€$
  - – $a_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.
  - → Opiskelijan kerryttämä rahamäärä hajaantuu.
  - – Mitä tämä tarkoittaisi käytännössä?

- ☐ Alun perin 60 000 € arvoisen auton hinta vuoden *n* alussa on $a_n = 60\,000 \cdot 0.8^{n-1}$
  - – $a_n \to 0$, kun $n \to \infty$
  - – Auton arvo suppenee.
  - – Mitä tämä tarkoittaa käytännössä?

# Yhteenveto lukujonoista

- Lukujono on päättyvä tai päättymätön jono reaalilukuja $a_1, a_2, \ldots, a_n$, joita sanotaan jonon *termeiksi*.

- Erikoistapauksia
  - Aritmeettisen jonon peräkkäisten termien erotus on vakio: $a_{n+1} - a_n = d$
  - Geometrisen jonon peräkkäisten termien suhde on vakio: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

- Joissakin erikoistapauksissa jonon kaikki termit voidaan esittää kompaktissa muodossa
  - Aritmeettinen jono: $(a_n) = a_1 + (n-1)d$
  - Geometrinen jono: $(a_n) = a_1 q^{n-1}$

- Lukujono *suppenee*, jos sen termit lähestyvät jotakin äärellistä raja-arvoa

# Sarjat

- Esim. Opiskelija X ottaa pankista puolivuosittain lainaksi 3000 € vuosikorolla 4%. Lainaa ei lyhennetä opiskeluaikana, mutta kertyneen lainapääoman korko maksetaan puolivuosittain.

- Maksettavat korot muodostavat aritmeettisen jonon:

$$0.02 \cdot 3000, 0.02 \cdot (2 \cdot 3000), 0.02 \cdot (3 \cdot 3000), \ldots = 60,120,180, \ldots$$

  eli jonon $(a_n) = 60n$ $(= 60 + 60(n-1))$

- Korkojen kokonaismäärä vuosipuoliskoon *n* mennessä:

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} 60i$$

- Termit $s_1 = 60, s_2 = 60 + 120, \ldots, s_n = 60 + 120 + \cdots + n \cdot 60$ muodostavat uuden lukujonon $(s_n) = \sum_{i=1}^{n} 60i$

# Sarjat

- Uutta jonoa $(s_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$ sanotaan lukujonosta $(a_n)$ muodostetuksi **sarjaksi**

- Lauseketta $a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ sanotaan **sarjan summaksi**

- Jonon $(s_n)$ termi $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ on **sarjan *n*. osasumma**

- Aritmeettisesta jonosta muodostettua sarjaa sanotaan **aritmeettiseksi sarjaksi**
- Geometrisesta jonosta muodostettua sarjaa sanotaan **geometriseksi sarjaksi**

# Aritmeettinen sarja

Esim. Opiskelija lainaa puolivuosittain 3000€ 4 % vuosikorolla ja maksaa aina samalla kertyneen lainan koron. Korot muodostavat aritmeettisen jonon $(a_n) = 60n$.

Korkoja maksetaan yhteensä:

$$s_{14} = 60€ + 120€ + \cdots + 840€$$

- Osasumma $s_{14}$ voidaan laskea helposti:
  - Listataan korot uudelleen käänteisessä järjestyksessä
  - Summataan saman rivin korot keskenään:
    $$60n + 60(15 - n) = 60 \cdot 15 = 900€ \; \forall n.$$
  - Lasketaan osasumma kaavalla

$$2s_{14} = 14 \cdot 900€ \Leftrightarrow$$

$$s_{14} = \frac{14 \cdot 900€}{2} = 6300€.$$

| Erä (n) | Korko (60n) | Erä (15-n) | Korko (60(15-n)) | Summa |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 60 | 14 | 840 | 900 |
| 2 | 120 | 13 | 780 | 900 |
| 3 | 180 | 12 | 720 | 900 |
| 4 | 240 | 11 | 660 | 900 |
| 5 | 300 | 10 | 600 | 900 |
| 6 | 360 | 9 | 540 | 900 |
| 7 | 420 | 8 | 480 | 900 |
| 8 | 480 | 7 | 420 | 900 |
| 9 | 540 | 6 | 360 | 900 |
| 10 | 600 | 5 | 300 | 900 |
| 11 | 660 | 4 | 240 | 900 |
| 12 | 720 | 3 | 180 | 900 |
| 13 | 780 | 2 | 120 | 900 |
| 14 | 840 | 1 | 60 | 900 |
| **Summa** | $s_{14}$ | **Summa** | $s_{14}$ | $2 \cdot s_{14}$ |

# Aritmeettinen sarja

- Yleisesti aritmeettisen sarjan *n*. osasumma saadaan kaavalla

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

- Perustelu:

$$\begin{array}{lllll} & s_n = a_1 + & a_2 + \cdots & + a_{n-1} + & a_n \\ + & s_n = a_n + & a_{n-1} + \cdots & + a_2 + & a_1 \\ \hline \end{array}$$

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + \quad a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + \quad a_2) + \quad (a_n + a_1)$$

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + \cancel{d} + a_n - \cancel{d}) + \cdots + (a_n - \cancel{d} + a_1 + \cancel{d}) + (a_n + a_1)$$

$$2s_n = n(a_1 + a_n) = n(a_1 + a_1 + (n-1)d) = 2na_1 + n(n-1)d$$

# Artimeettinen sarja

Esim. Ekonomisti E alkaa kuntoilla vuoden alussa. 1. viikolla hän harjoittelee 120 min ja lisää aikaa joka viikko 5 min. Paljonko E harjoittelee koko vuoden (52 viikkoa) aikana?

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \Rightarrow$$

$$s_{52} = 52 \cdot 120 \text{ min} + \frac{52 \cdot (52-1) \cdot 5\text{min}}{2}$$
$$= 12\,870 \text{ min} = 214.5 \text{ h}$$

# Taukojumppa

Erään koripallosarjan runkosarjassa on 82 peliä. Sentteri Sentunen pelaa runkosarjan ensimmäisessä pelissä 40 minuuttia, minkä jälkeen hänen peliaikansa vähenee 20 s / peli. Kuinka monta minuuttia Sentunen pelaa runkosarjapelissä keskimäärin?

1. 20.5
2. 26.5
3. 29.5

# Geometrinen sarja

Esim. Yritys sitoutuu maksamaan aiheuttamastaan haitasta vuosittain korvauksen, joka on 1. vuonna 5000€ ja sitä seuraavina vuosina 5000€ 4% vuosittaisella inflaatiokorjauksella.

1. Kuinka suuri tulee olemaan korvauksen vuosittainen (nimellis-)arvo 1., 2., 3., ja n. vuonna?
2. Entä maksettujen korvausten yhteenlaskettu määrä?

Vuosittaiset korvaukset muodostavat geometrisen jonon:

$5000, 5000 \cdot 1.04, 5000 \cdot 1.04^2, \dots, 5000 \cdot 1.04^{n-1}$

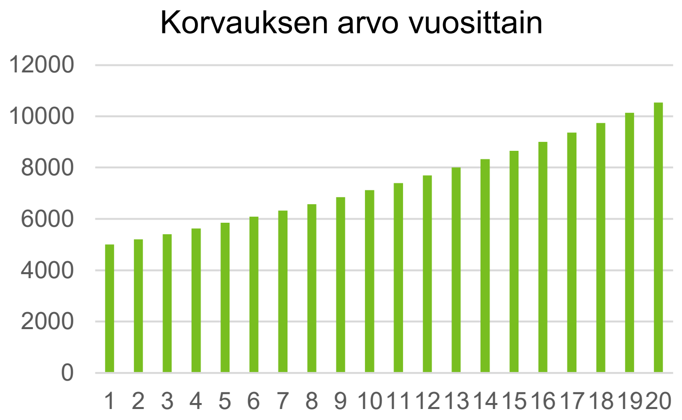
Kumulatiiviset korvausmäärät muodostavat geometrisen sarjan:

$s_1 = 5000$

$s_2 = 5000 + 5000 \cdot 1.04$

$s_3 = 5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2$

$s_n = 5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + \cdots + 5000 \cdot 1.04^{n-1}$



Lauri Viitasaari (pohjaa Eeva Vilkkumaan ja Juha Heikkilän materiaaleihin)

# Geometrinen sarja

Osasummien laskemiseksi voidaan johtaa kätevä kaava:

$$
\begin{aligned}
s_n &= 5000 + 5000 \cdot 1.04 + 5000 \cdot 1.04^2 + \cdots + 5000 \cdot 1.04^{n-1} \\
&= 5000 + 1.04 \cdot \underbrace{(5000 + 5000 \cdot 1.04 + \cdots + 5000 \cdot 1.04^{n-2})}_{= s_{n-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_n &= 5000 + 1.04 s_{n-1} \\
&= 5000 + 1.04(s_n - 5000 \cdot 1.04^{n-1})
\end{aligned}
$$

(Koska $s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + 5000 \cdot 1.04^{n-1}$)

$$(1.04 - 1)s_n = (1.04^n - 1)5000$$

$$s_n = \frac{(1.04^n - 1)5000}{(1.04 - 1)}$$

Esim. 15 vuodessa yritys maksaa yhteensä $\frac{(1.04^{15} - 1)5000}{(1.04 - 1)} = 100117.94€$ korvauksia.

# Geometrinen sarja

- ☐ Yleisesti geometrisen sarjan *n*. osasumma saadaan kaavalla

$$s_n = \frac{(q^n - 1)a_1}{(q-1)} = \frac{(1-q^n)a_1}{(1-q)}$$

- ☐ Perustelu kuten edellä:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$
$$= a_1 + q\underbrace{(a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-2})}_{= s_{n-1}}$$

$$s_n = a_1 + q s_{n-1}$$
$$= a_1 + q(s_n - a_1 q^{n-1})$$

(Koska $s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_1 q^{n-1}$)

$$(q-1)s_n = (q^n - 1)a_1$$

$$s_n = \frac{(q^n - 1)a_1}{(q-1)}$$

# Taukojumppa

Pirjo ja Pena osallistuvat tammikuun vegaanihaasteeseen. Lisämotivaation aikaansaamiseksi he sopivat, että ensin eläinkunnan tuotteisiin sortunut joutuu maksamaan toiselle ensin 100€ ja seuraavan 9 vuoden ajan aina 80% edellisvuoden summasta. Kuinka paljon maksettavaa kertyisi yhteensä?

1. 416 €
2. 433 €
3. 446 €

# Sarjan suppeneminen

- ❑ Sarja suppenee, jos sen osasummien jono $(s_n)$ lähestyy jotain äärellistä raja-arvoa *s*: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.
- ❑ Raja-arvoa $s$ kutsutaan **sarjan summaksi**.

- ❑ Esim. Henkilö vuokraa tontin. Vuorkasopimus on “ikuinen” ja vuokrasta sovitaan, että se on 1. vuonna 2000€ ja pienenee sen jälkeen vuosittain 10%. Kuinka suuri on maksettavien vuokrien kokonaismäärä 5, 10, 50, 100, 200 vuoden kuluttua?

- ❑ Ratkaisu: Vuosivuokrat muodostavat geometrisen jonon $(a_n) = 2000 \cdot 0.9^{n-1}$. Vuokrakertymä vuonna *n:* $s_n = \frac{(1-q^n)a_1}{(1-q)} = \frac{(1-0.9^n)2000}{0.1}$.

- ❑ Osasummien jono lähestyy 20 000 euroa → sarja suppenee ja sen summa on 20 000 €.

| Vuosi | Vuokra | Kertymä |
|---|---|---|
| 1 | 2000 | 2000 |
| 5 | 1312.2 | 8190 |
| 10 | 774.841 | 13026 |
| 50 | 11.45283 | 19897 |
| 100 | 0.059025 | 19999 |
| 200 | 1.57E-06 | 20000 |

# Sarjan suppeneminen

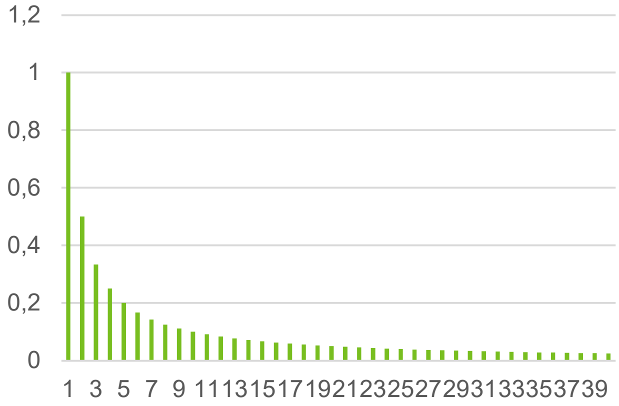
- Jos sarja ei suppene, se **hajaantuu**.

- Jotta sarja $a_1 + a_2 + \cdots$ suppenisi, on termeistä $a_n$ tultava “merkityksettömän pieniä”, kun $n$ kasvaa.

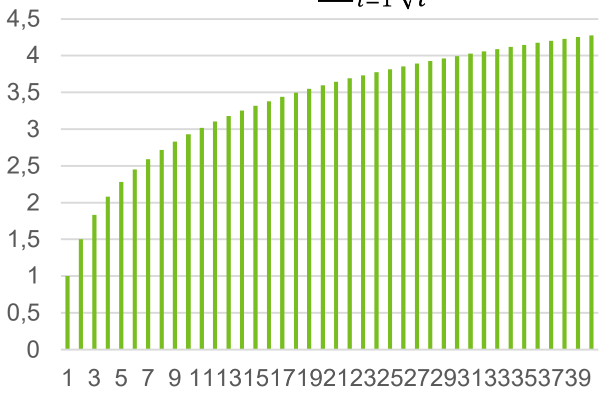
- Välttämätön ehto suppenemiselle onkin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
  - Esim. Edellä $\lim_{n\to\infty} 2000 \cdot 0.9^{n-1} = 0$.

- Tämä ehto ei kuitenkaan ole riittävä!
  - Esim. Lukujonosta $(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ muodostettu *harmoninen sarja* hajaantuu, vaikka $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
  - Syy: termit $a_n$ eivät mene nollaan tarpeeksi nopeasti

$(a_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$



$(s_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$



# Geometrisen sarjan suppeneminen

- Voidaan osoittaa, että geometrinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun $|q| < 1$.

- Tällöin sarjan summa

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)a_1}{(1-q)} = \frac{a_1}{(1-q)}.$$

- (Jatkoa ikuisen vuokrasopimuksen esimerkkiin.) Vuosivuokrat muodostavat geometrisen jonon $(a_n) = 2000 \cdot 0.9^{n-1}$. Koska $|0.9| < 1$, vuokrakertymää kuvaava sarja suppenee. Ikuisen vuokrasopimuksen aikana vuokrakertymä on $\frac{2000}{(1-0.9)} = 20\,000$ €.

# Taukojumppa

Pirjo ja Pena korottavat tammikuun vegaanihaasteen panoksia ja sopivat, että ensin eläinkunnan tuotteisiin sortunut joutuu maksamaan toiselle 100€ ja seuraavina vuosina aina 80% edellisvuoden summasta jatkuen “ikuisesti”. Kuinka paljon maksettavaa kertyisi yhteensä?

1. 500€,
2. 800€,
3. Äärettömästi.

# Yhteenveto sarjoista

- ❑ Lukujonosta $(a_n)$ muodostettujen osasummien $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ jonoa $(s_n)$ sanotaan sarjaksi.
  - Aritmeettinen sarja: $s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$,
  - Geometrinen sarja: $s_n = \frac{(q^n-1)a_1}{(q-1)} = \frac{(1-q^n)a_1}{(1-q)}$.
- ❑ Sarja suppenee, jos sen termit lähestyvät jotain äärellistä raja-arvoa *s*: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.
  - Raja-arvoa $s$ sanotaan sarjan summaksi.
- ❑ Geometrinen sarja suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$, jolloin sarjan summa $s = \frac{a_1}{(1-q)}$.

**Aalto University**
**School of Business**

Lauri Viitasaari (pohjaa Eeva Vilkkumaan ja Juha Heikkilän materiaaleihin)

# Sovelluksia korkolaskentaan

Esimerkki 1: Opiskelija lainaa puolivuosittain 3000€ 4% vuosikorolla ja maksaa aina samalla kertyneen lainan koron. Lainatun pääoman hän maksaa takaisin seitsemän vuoden opintojen päätyttyä. Kuinka paljon maksettavaa kertyy kaikkiaan?

- Maksettava lainapääoma: $14 \cdot 3000€ = 42\,000€$.
- Korot muodostavat aritmeettisen jonon $(a_n) = 60 + 60(n-1) \rightarrow s_{14} = 14 \cdot 60 + \frac{14(14-1)60}{2} = 6300€$
- Maksettavaa yhteensä: $42\,000€ + 6\,300€ = 48\,300€$.

| Vuosipuolikas | Laina | Korot |
|---|---|---|
| 1 | $3000€$ | $0.02 \cdot 3000€ = 60€$ |
| 2 | $3000€$ | $0.02 \cdot 6000€ = 120€$ |
| 3 | $3000€$ | $0.02 \cdot 9000€ = 180€$ |
| … | … | … |
| 14 | $3000€$ | $0.02 \cdot 14 \cdot 3000€ = 840€$ |
| Summa | $14 \cdot 3000€ = 42\,000€$ | $6300€$ |

# Sovelluksia korkolaskentaan

Esimerkki 2: Entä jos opiskelija maksaa koko summan (lainan ja korot) vasta opintojen päätyttyä?

- $n$. vuosipuolikasta ennen opintojen päättymistä otetun lainan arvo opintojen päättymishetkellä: $3000 \cdot 1.02^n$
- Maksettava summa on tällöin geometrisen sarjan osasumma $s_{14} = \sum_{i=1}^{14} 3000 \cdot 1.02^i = \sum_{i=1}^{14} 3000 \cdot 1.02 \cdot 1.02^{i-1} = \frac{3000\cdot\ \ .02\cdot(1.02^{14}-1)}{1.02-1} = 48\,880.25€.$
- Korkojen osuus: $48\,880.25€ - 42\,000€ = 6\,880.25€.$

| Vuosipuolikas | Laina + korkokertymä |
|---|---|
| 14 | $1.02 \cdot 3000€$ |
| 13 | $1.02^2 \cdot 3000€$ |
| 12 | $1.02^3 \cdot 3000€$ |
| … | … |
| 1 | $1.02^{14} \cdot 3000€$ |

# Annuiteettimenetelmä

- Joissakin tapauksissa lainan hoitomaksu (sisältäen lyhennyksen ja korot) suoritetaan *tasaerinä*
- Tätä tasaerää kutsutaan *annuiteetiksi*

- Esim. Opiskelija X:llä on velkaa 60 000 € (=$K$). Pankin kanssa sovitaan, että
  - Laina maksetaan takaisin kuukausittain 20 vuodessa,
  - Vuosikorko on 3.6% ja
  - Joka kuukausi pankille maksetaan saman suuruinen erä $b$€.
- Kuinka suuri on erä $b$ (=annuiteetti)?

# Annuiteettimenetelmä

- ☐ Eriä on $20 \cdot 12 = 240$ kpl (=n)
- ☐ Korkotekijä kuukautta kohden on $r = \left(1 + \frac{3.6/12}{100}\right) = 1.003.$

| Kk | Jäljellä oleva velka |
|---|---|
| 1. | $1.003 \cdot 60\,000 - b$ |
| 2. | $1.003 \cdot (1.003 \cdot 60\,000 - b) - b = 1.003^2 \cdot 60\,000 - b(1.003 + 1)$ |
| 3. | $1.003 \cdot (1.003^2 \cdot 60\,000 - 1.003b - b\ ) - b = 1.003^3 \cdot 60\,000 - b(1.003^2 + 1.003 + 1)$ |
| … | … |
| *n.* | $1.003^n \cdot 60\,000 - b\underbrace{(1.003^{n-1} + 1.003^{n-2} + \cdots + 1.003 + 1)}$ |

Geometrisen sarjan osasumma $s_n$: $a_1 = 1, q = r = 1.003$

# Annuiteettimenetelmä

- 20 vuoden kuluttua maksetaan viimeinen erä, jolloin jäljellä oleva velka:

$$1.003^{240}\cdot 60\ 000 - b(1.003^{239} + 1.003^{238} + \cdots + 1.003 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1.003^{240}\cdot 60\ 000 - b\,\frac{(1.003^{240}-1)}{1.003-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$b = \frac{1.003^{240}\cdot 6\quad 000(1.003-1)}{(1.003^{240}-1)} \approx 351.07€/\mathrm{kk}$$

- Korkokustannukset ovat $240\cdot 351.07€ - 60\ 000€ = 24\ 256.80\ €$.

# Annuiteettimenetelmä

- ☐ Yleisesti:

$$b = \frac{r^n \cdot K(r-1)}{(r^n-1)},$$

missä $K$ = lainasumma, $r$ = korkotekijä, $n$ = maksuerien määrä.

- ☐ Esim. Kuinka suuri on maksuerän suuruus, kun 60 000 € laina ($K$ = 60 000) maksetaan puolivuosittain annuiteettiperiaatteella 20 vuodessa ($n$ = 40) ja vuosikorko on 3.6% ($r$ = 1.018)?

$$b = \frac{1.018^{40} \cdot 60000(1.018-1)}{(1.018^{40}-1)} = 2117.145.$$

Korkokulut ovat tällöin $40 \cdot 2117.145\text{ €} - 60000\text{ €} = 24\,686$€.

# Annuiteettimenetelmä

- Esim. Kuinka suuret ovat korkokulut, jos pääoman lyhennykset ovat yhtä suuria?
  - Lainaa lyhennetään $\frac{60000€}{40} = 1500€$ puolivuosittain

| Vuosipuolikas | Maksettavat korot |
|---|---|
| 1. | $0.018 \cdot 60\,000 = 0.018 \cdot 40 \cdot 1500 = 40 \cdot 27$ |
| 2. | $0.018 \cdot 58\,500 = 0.018 \cdot 39 \cdot 1500 = 39 \cdot 27$ |
| 3. | $0.018 \cdot 57\,000 = 0.018 \cdot 38 \cdot 1500 = 38 \cdot 27$ |
| … | … |
| 40. | $0.018 \cdot 1500 = 1 \cdot 27$ |

Aritmeettisen sarjan osasumma $s_n$:
$a_1 = 27, d = 27$

$$s_{40} = \frac{40(0.018 \cdot 60\,000 + 0.018 \cdot 1500)}{2} = 40 \cdot 27 + \frac{40 \cdot (40-1) \cdot 27}{2} = 22\,140\text{ €}$$

# Taukojumppa

- ☐ Meiju lainaa pankista 10 000 €, jonka hän sopii maksavansa takaisin vuosittaisina tasaerinä 10 vuodessa. Mikä on vuosittaisen tasaerän suuruus, kun vuosikorko on 5%?

1. 1050 €
2. 1295 €
3. 1629 €

# Yhteenveto sovelluksista

- Sarjoilla on monenlaisia taloudellisia sovelluksia
  - Kassavirta-analyysi
  - Sijoitusten/lainojen nykyarvojen laskeminen

- Esim. Annuiteettiperiaatteella myönneyt lainan maksuerän $b$ laskemisessa voidaan hyödyntää geometrisen sarjan ominaisuuksia:

$$b = \frac{r^n \cdot K(r-1)}{(r^n - 1)}$$

- Sarjoja käytetään myös monimutkaisten funktioiden approksimoinnissa (ei käsitellä tällä kurssilla):
  - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, kun $x \approx 0$
  - $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, kun $x \approx 0$