Aalto University
School of Business

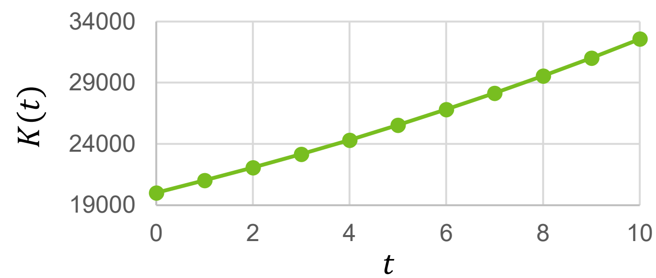
Talousmatematiikan perusteet: Luento 3

Funktiot

Tähän mennessä

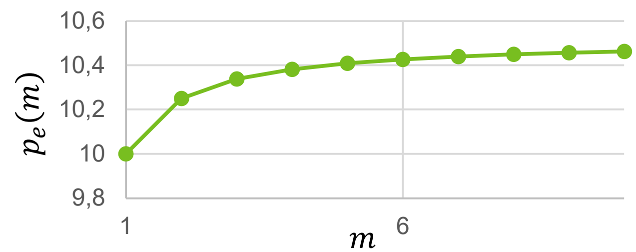
- Olemme jo tarkastelleet erilaisten muuttujien välisiä riippuvuuksia:
  - Henkilö lainaa 20 000€ pankista 5% vuosikorolla. Miten lainasumma K riippuu vuodesta t?

$$K(t) = 20\,000€ \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t$$



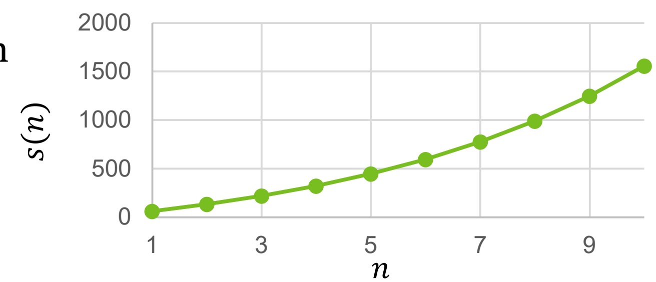
  - Henkilö lainaa 5000€ 10% nimellisellä vuosikorolla siten, että korkoa lisätään pääomaan m kertaa vuodessa. Miten efektiivinen vuosikorko p_e riippuu m:stä?

$$p_e(m) = 100\left(1 + \frac{10/m}{100}\right)^m - 100$$



  - Tarkastellaan geometrista lukujonoa $(a_n) = 60 \cdot 1.2^{n-1}$. Miten jonosta muodostetun sarjan termi riippuu termin järjestysluvusta n?

$$s(n) = \frac{60 \cdot (1.2^n - 1)}{(1.2 - 1)}$$



Tällä luennolla

- Muuttujien välisiä yhteyksiä kuvataan yleisesti *funktioilla,* esim.
  - Lainasumma $K(t)$=20 000€ $\cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^t$ on vuoden t funktio
  - Efektiivinen korko $p_e(m) = 100\left(1+\frac{10/m}{100}\right)^m - 100$ on koronlisäämiskertojen määrän m funktio
  - Geometrisen sarjan termi $s(n) = \frac{60\cdot(1.2^n-1)}{(1.2-1)}$ on järjestysluvun n funktio

- Tällä luennolla tarkastellaan joitakin tavallisia funktiotyyppejä

Funktiot

- Esim. Kiinteistöyhtiö ostaa teollisuusprosessissa syntyvää lauhdevettä, jota se välittää edelleen kiinteistölle kaukolämmöksi. Kiinteistölle välitettävästä sopimuksesta yhtiö maksaa tehtaalle
  - Perusmaksun, joka on 20.30€ kuukaudessa ja
  - Kulutuksesta 16.10€/MWh

- Käytetään merkintöjä
  - Ostettava lauhdevesimäärä: x
  - Laskun suuruus: y

- Ostettavan määrän ja laskun suuruuden yhteyttä kuvaa *funktio*

$f(x)$ on sääntö, joka kuvaa ostettavan lauhdevesimäärän (x) laskun suuruudeksi (y).

$$y = f(x) = 16.10x + 20.30.$$

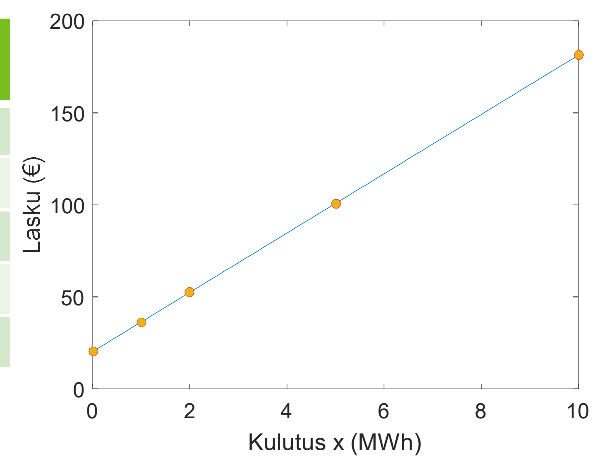
Lineaarinen funktio

- Funktiotyyppiä $f(x) = a_0 + a_1 x$ sanotaan <u>lineaariseksi funktioksi</u>

- Lineaarisen funktion kuvaaja on suora:
  - Kerroin a_0 määrittää kohdan, jossa suora leikkaa y-akselin
  - Kerroin a_1 on suoran kulmakerroin, joka mittaa funktion f absoluuttista muutosnopeutta

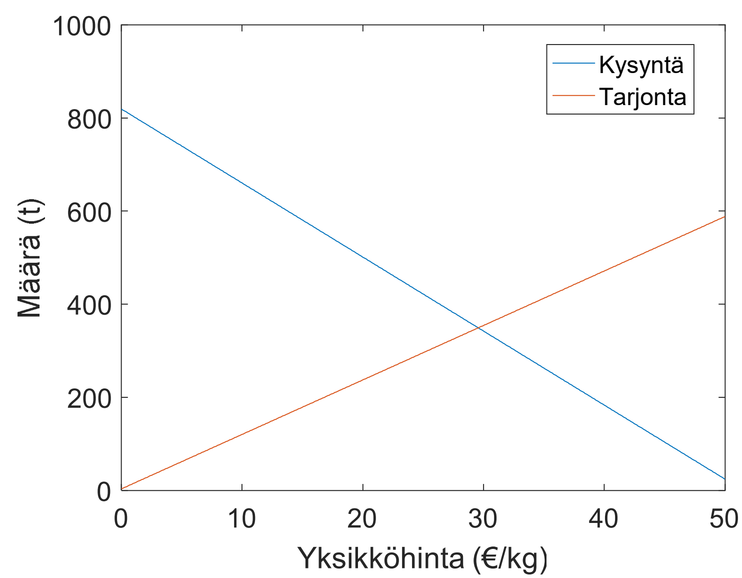
- Esim. Kaukolämmön kulutuksen ja laskun suuruuden yhteyttä kuvaa lineaarinen funktio $f(x) = 16.10x + 20.30$
  - Kerroin $a_0 = 20.3$: nollakulutuksella lasku on perusmaksu 20.30€.
  - Kerroin $a_1 = 16.1$: yhden MWh:n lisäys kulutuksessa kasvattaa laskua 16.10€.

Kulutus x (MWh)	Lasku y=f(x) (€)
0	20.3
1	36.4
2	52.5
5	100.8
10	181.3



Sovellus tasapainohinnoitteluun

- Esim. Ekonomisti tutkii luomuturnipsin kysynnän ja tarjonnan (t) riippuvuutta yksikköhinnasta *x* (€/kg):
  - Kysyntä: $f(x) = -15.9x + 810.2$
  - Tarjonta: $g(x) = 11.7x + 3.3$



- Markkinat ovat tasapainossa suorien leikkauspisteessä, eli kun kysyntä = tarjonta:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$-15.9x + 810.2 = 11.7x + 3.3 \Leftrightarrow$$
$$x \approx 29.2\,\frac{€}{\mathrm{kg}},\ f(x) \approx 345.4\mathrm{t}$$

Taukojumppa

Juustomakkaran kysyntä ja tarjonta (t) riippuvat yksikköhinnasta h (€/kg) seuraavasti:

- Kysyntä: $k(h) = -10h + 700$
- Tarjonta: $t(h) = 12h + 480$

Määritä tasapainohinta.

1. 7 €/kg
2. 10 €/kg
3. 40 €/kg

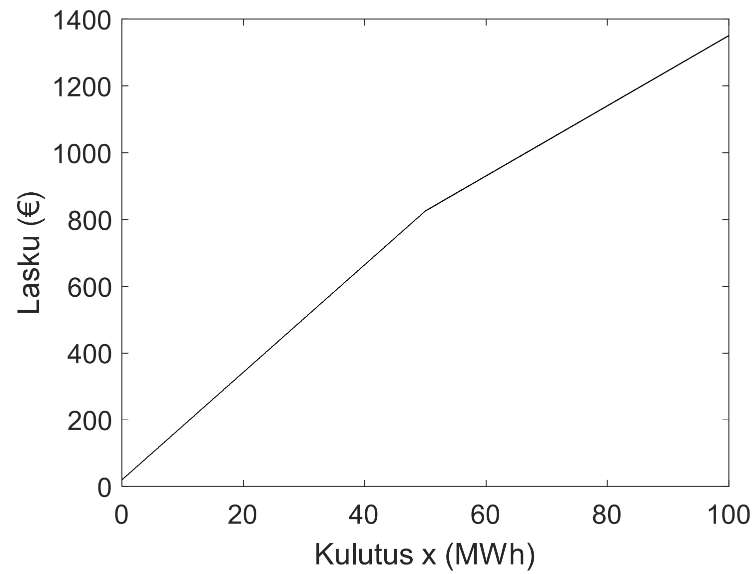
Paloittain lineaarinen funktio

- Esim. Kiinteistöhuoltoyhtiön välittämissä kaukolämpösopimuksissa on ehto, jonka mukaan
  1. Perusmaksu toimituksesta on 20.30€/kk, ja
  2. Kulutuksesta maksetaan tehtaalle 16.10 €/MWh, mutta
  3. 50 MWh:n ylittävästä kulutuksesta maksetaan 10.50€/MWh.

- Kulutuksen ja laskun yhteyttä kuvaa nyt paloittain lineaarinen funktio:

$$f(x) = \begin{cases} 20.30 + 16.10x, & \text{kun } x \leq 50 \\ 300.30 + 10.50x, & \text{kun } x > 50 \end{cases}$$

$$20.30 + \underbrace{16.10 \cdot 50}_{\text{50 MWh:n alittava osa}} + \underbrace{10.50(x - 50)}_{\text{50 MWh:n ylittävä osa}}$$



Taukojumppa

Teleoperaattorin tarjouksessa asiakas maksaa datankäytöstä kuukausittain kiinteän hinnan 3 €/kk ja käytön mukaan 0.2 senttiä / Mt neljään gigatavuun asti. 4 Gt ylittävästä käytöstä asiakas maksaa 0.25 senttiä / Mt. Mikä funktioista kuvaa datankäytöstä aiheutuvaa kuukausilaskua (€) toteutuneen käytön x (Gt) suhteen?

1. $f_1(x) = \begin{cases} 3 + 0.2x, & \text{kun } x \leq 4 \\ 3.8 + 0.25x, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$

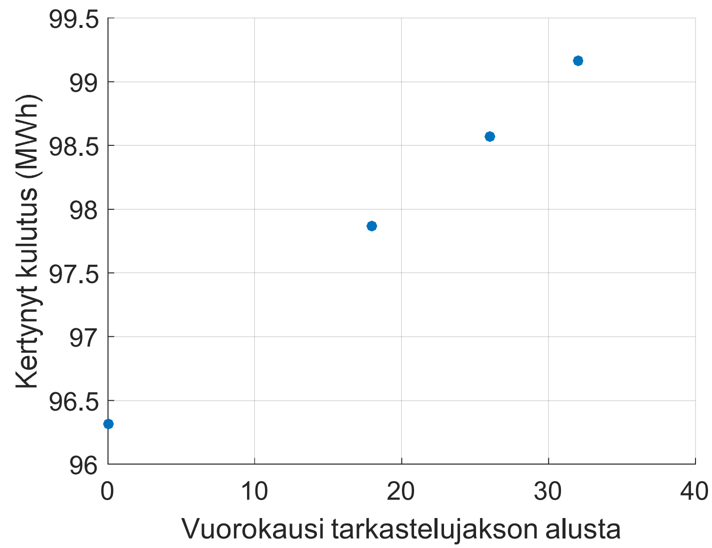
2. $f_2(x) = \begin{cases} 3 + 2x, & \text{kun } x \leq 4 \\ 11 + 2.5x, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$

3. $f_3(x) = \begin{cases} 3 + 2x, & \text{kun } x \leq 4 \\ 1 + 2.5x, & \text{kun } x > 4 \end{cases}$

Lineaarinen interpolointi

- Empiirisiä ilmiöitä kuvaavista muuttujista x ja y tunnetaan useimmiten tarkan yhteyden sijaan vain joitakin havaintopisteitä $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$
- Havaintopisteiden <u>välillä</u> (lat. *inter*) muuttujien yhteyttä voidaan arvioida interpoloimalla
- Esim. Kiinteistö on sitoutunut ilmoittamaan käytetyn kaukolämmön määrän noin viikon välein Energialaitokselle. Huolimattomuussyistä 7.10. otettu lukema on jäänyt ilmoittamatta. Miten arvioisit puuttuvaa lukemaa?

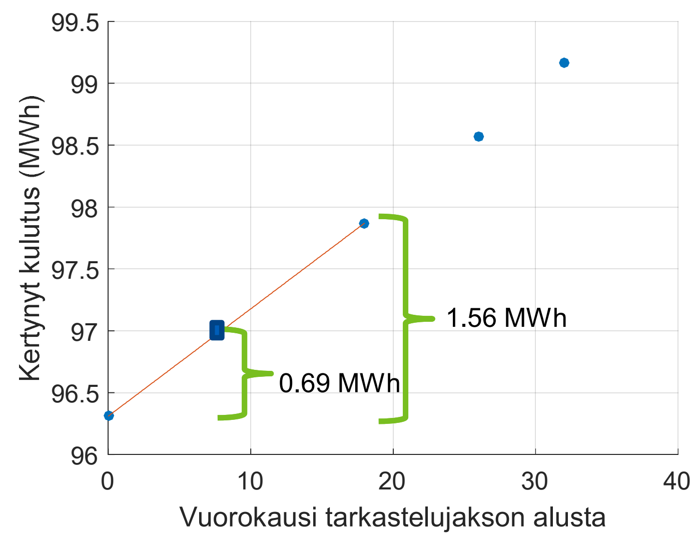
Päivä	Lukema (MWh)
29.9. (0)	96.31
7.10. (8)	??
17.10. (18)	97.87
25.10. (26)	98.57
1.11. (32)	99.17



Lineaarinen interpolointi

- Kuvan perusteella kulutuksen voi olettaa kertyvän lineaarisesti:
  - Välillä 29.9.-17.10. (18 päivää) kulutuksen kasvu oli 97.87-96.31=1.56 MWh
  - Välin 29.9-7.10. (8 päivää) osuus tästä kasvusta on $\frac{8}{18} \cdot 1.56 \approx 0.69$ MWh.
  - Arvio 7.10. lukemalle = 96.31+0.69=97.00 MWh

Päivä	Lukema (MWh)
29.9. (0)	96.31
7.10. (8)	??
17.10. (18)	97.87
25.10. (26)	98.57
1.11. (32)	99.17

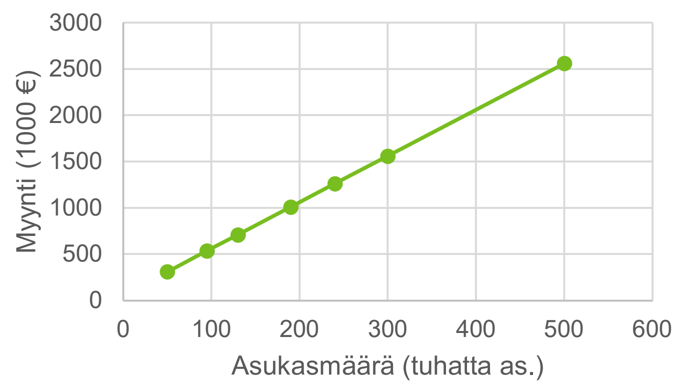


Taukojumppa

Taulukossa on dataa pikaruokaravintolaketjun kvartaalikohtaisesta myynnistä eri kokoisissa kaupungeissa. Ketjun johtajat harkitsevat uuden ravintolan avaamista kaupungissa, jossa on 200 000 asukasta. Mikä on lineaariseen malliin perustuva ennuste kvartaalikohtaiselle myynnille uudessa ravintolassa?

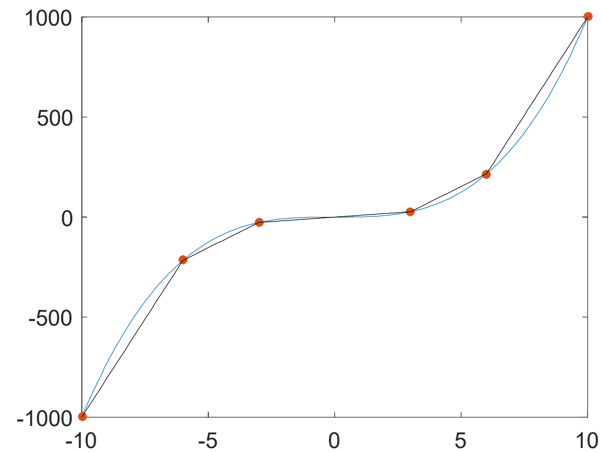
As.määrä (tuhatta)	Myynti (1000€)
50	310
95	535
130	710
190	1010
240	1260
300	1560
500	2560

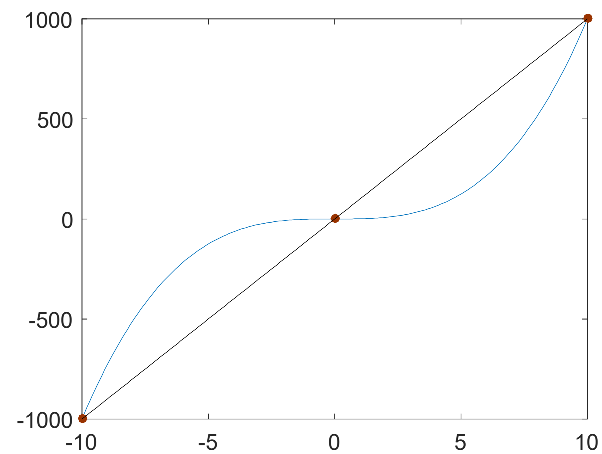
1. 1060
2. 1100
3. 1160



Lineaarinen interpolointi

- Lineaarinen interpolointi vastaa paloittain lineaarisen funktion määrittämistä
- Paloittain lineaarisella funktiolla voidaan approksimoida mitä tahansa funktiota
  - Jos havaintopisteet on valittu (tai ovat valikoituneet) sopivasti, lineaarinen interpolointi toimii hyvin todellisesta funktiomuodosta huolimatta
  - Mutta jos havaintopisteet on valittu (tai ovat valikoituneet) huonosti, myös lineaarinen interpolointi toimii huonosti

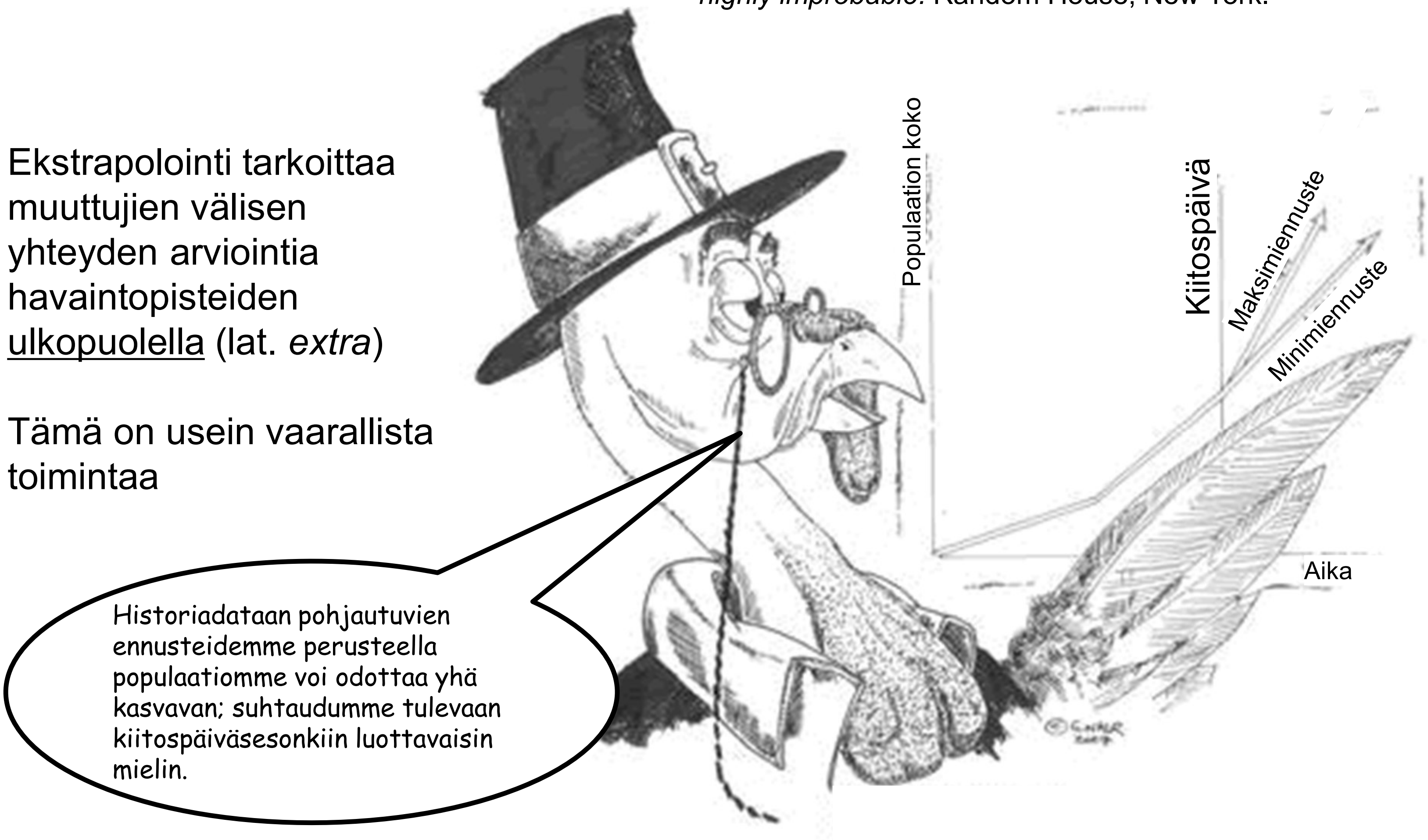




Ekstrapolointi

- Ekstrapolointi tarkoittaa muuttujien välisen yhteyden arviointia havaintopisteiden <u>ulkopuolella</u> (lat. *extra*)
- Tämä on usein vaarallista toimintaa

Kuvalähde: Taleb, N. 2007. *The black swan: the impact of the highly improbable.* Random House, New York.



Yhteenveto lineaarisista ja paloittain lineaarisista funktioista

- Lineaarinen funktio on muotoa $y = f(x) = a_0 + a_1 x$, ja sen kuvaaja on suora
  - Kerroin a_0 määrittää kohdan, jossa suora leikkaa y-akselin
  - Kerroin a_1 on suoran kulmakerroin, joka mittaa funktion f absoluuttista muutosnopeutta (eli mikä on funktion arvon muutos, kun x kasvaa yksikön verran)

- Paloittain lineaarisella funktiolla voidaan mallintaa tilannetta, jossa kuvaajan kulmakerroin vaihtelee x:n arvosta riippuen (esim. tuotteen yksikköhinta halpenee tilausmäärän ylittäessä tietyn kynnysarvon)

- Lineaarista interpolointia käytetään, kun
  - Tarkasteltavista muuttujista on saatavilla vain joitakin havaintopisteitä,
  - Muuttujien välinen yhteys voidaan olettaa lineaariseksi havaintopisteiden välillä, ja
  - Muuttujien välistä yhteyttä halutaan arvioida näillä väleillä

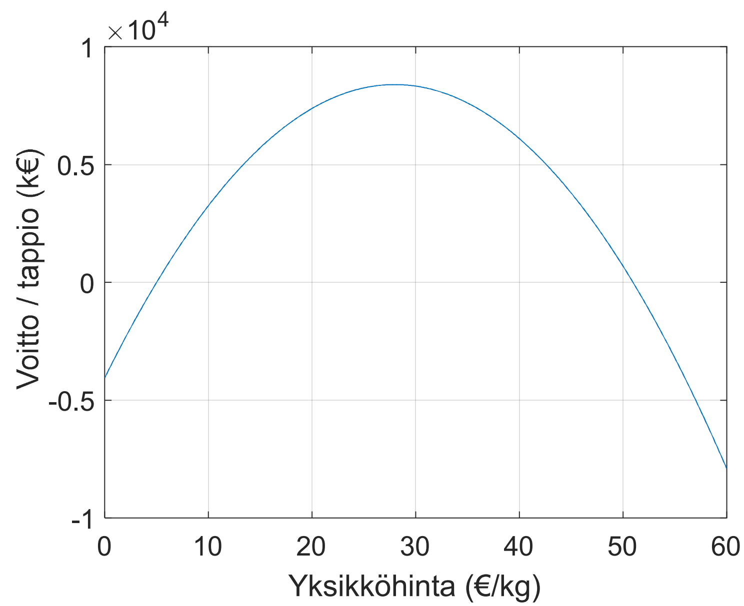
Toisen asteen polynomifunktio

- Toisen asteen polynomifunktio on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Esim. Luomuturnipsin kysyntä $f(x)$ yksikköhinnan x (€/kg) funktiona on $f(x) = -15.9x + 810.2$. Turnipsin tuottajat muodostavat kartellin, jonka tavoitteena on maksimoida markkinoilta saatava voitto, kun tuotantokustannus on 5 €/kg. Mikä on kartellihinta x?

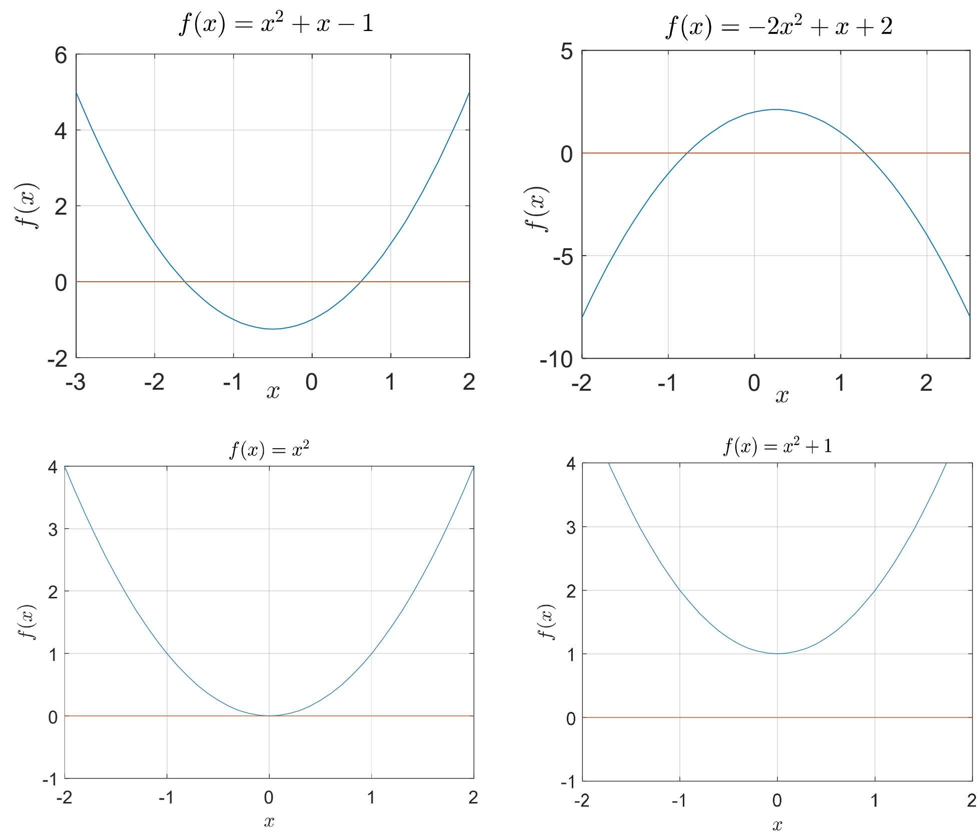
  – Voittoa/tappiota kuvaa toisen asteen polynomifunktio v:
$$v(x) = f(x)(x-5) = (-15.9x + 810.2)(x-5) = -15.9x^2 + 889.7x - 4051.$$

  – Kuvan perusteella voitto maksimoituu, kun $x \approx 28$ €/kg, jolloin $v(x) = -15.9 \cdot 28^2 + 889.7 \cdot 28 - 4051 = 8395$ k€ ≈ 8.4M€.



Kuvaaja ja nollakohdat

- Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ kuvaaja on paraabeli, joka aukeaa
  - Ylöspäin, jos $a > 0$,
  - Alaspäin, jos $a < 0$. (Mitä jos $a = 0$?)



- Paraabeli leikkaa x-akselin joko 0, 1 tai 2 kertaa

- Näitä leikkauskohtia sanotaan funktion *nollakohdiksi* tai *(reaali)juuriksi*

Aalto University School of Business

Lauri Viitasaari (pohjaa Eeva Vilkkumaan ja Juha Heikkilän materiaaleihin)

Nollakohtien ratkaiseminen

- Nollakohdat voidaan ratkaista kaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Nollakohtien lukumäärä riippuu **diskriminantista** $b^2 - 4ac$:
  - Jos $b^2 - 4ac > 0$, nollakohtia on 2 ($x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ja $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$)
  - Jos $b^2 - 4ac = 0$, nollakohtia on 1 ($x = \frac{-b}{2a}$)
  - Jos $b^2 - 4ac < 0$, (reaalisia) nollakohtia ei ole

Nollakohtien ratkaiseminen

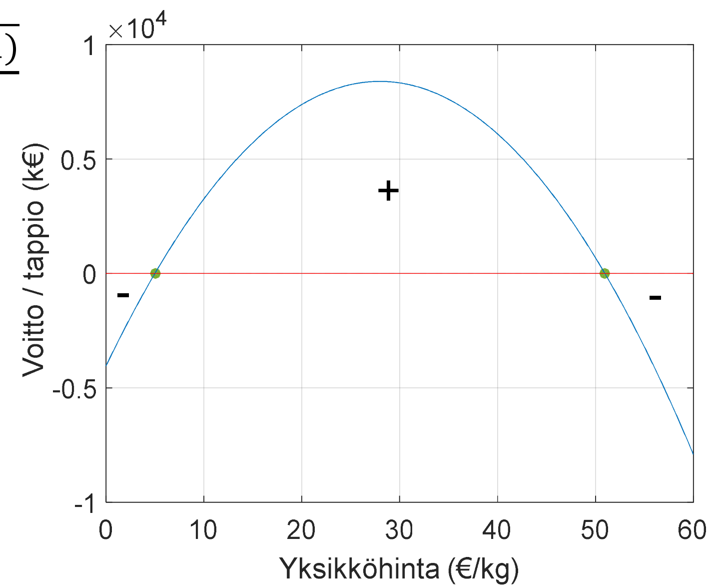
- Esim. (Jatkuu) Millä välillä turnipsin kilohinnan pitää olla, jotta se tuottaisi voittoa?

$$v(x) = -15.9x^2 + 889.7x - 4051$$

Nollakohdat: $x = \frac{-889.7 \pm \sqrt{889.7^2 - 4\cdot(-15.9)\cdot(-4051)}}{2\cdot(-1\ \ .9)}$

$$= 27.978 \pm 22.978 \Rightarrow$$

$x_1 = 5.00$ ja $x_2 = 50.96.$



- Kuvan perusteella voidaan siis sanoa, että tulos on voitollinen, jos kilohinta $x \in [5.00 \frac{€}{\text{kg}}, 50.96 \frac{€}{\text{kg}}]$.

Sovellus tasapainohinnoitteluun

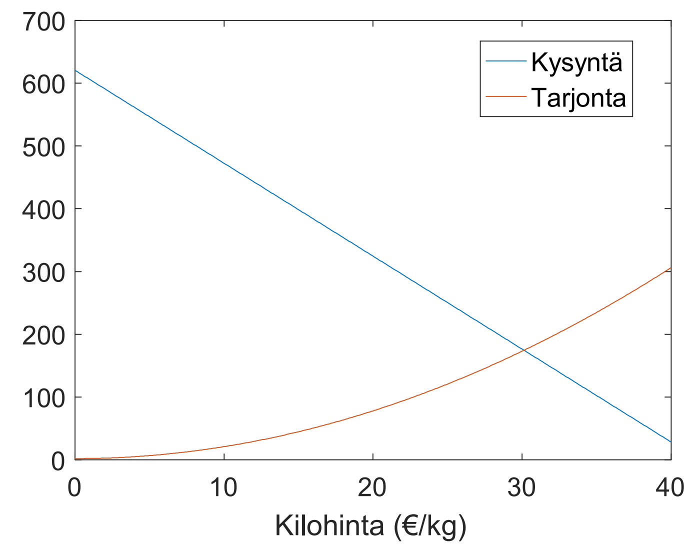
- Esim. Ekonomisti tutki kapakalan kysynnän ja tarjonnan (t) riippuvuutta yksikköhinnasta *x* (€/kg):
  - Kysyntä $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = -14.8x + 620.5$
  - Tarjonta $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ g(x) = 0.19x^2 + 2.1$

- Markkinat ovat tasapainossa kysyntä- ja tarjontakäyrien leikkauspisteessä, eli kun kysyntä = tarjonta:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$-14.8x + 620.5 = 0.19x^2 + 2.1 \Leftrightarrow$$
$$0.19x^2 + 14.8x - 618.4 = 0$$

$$x_1 \approx 30.13\,\frac{€}{\text{kg}},\ f(x_1) = g(x_1) \approx 174.6\ \text{t}$$

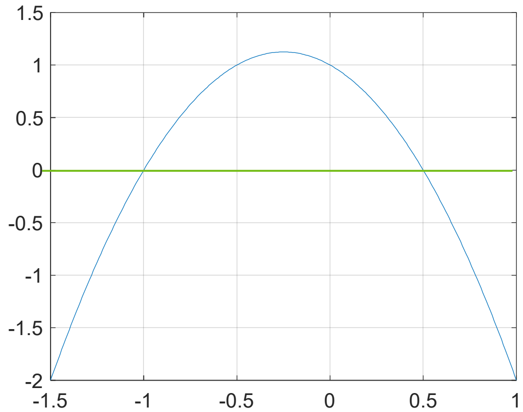
$$x_2 \approx -108.02\,\frac{€}{\text{kg}}\ \text{ ei mielekäs}$$



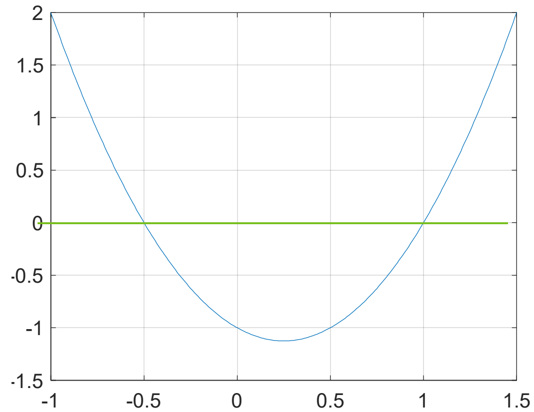
Taukojumppa

Mikä kuvaajista esittää funktiota $f(x) = -2x^2 + x + 1$?

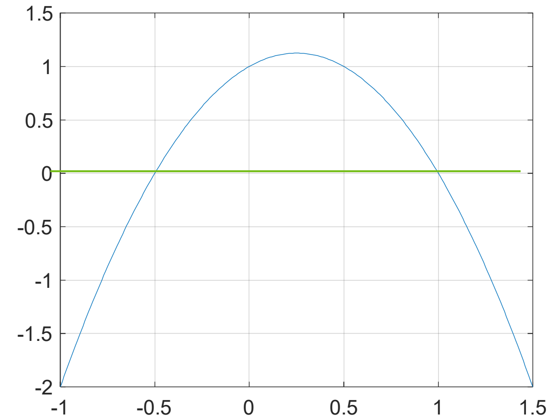
Kuva A



Kuva B



Kuva C



Korkeamman asteen polynomifunktiot

- Korkeamman asteen polynomifunktioita tarvitaan
  - Joidenkin empiiristen ilmiöiden mallintamiseen
  - Funktioiden approksimointiin sarjakehitelmillä; esim. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- Korkeamman asteen polynomifunktioiden nollakohtien ratkaiseminen käsin on hankalaa

- Käytettävissä on kuitenkin monenlaisia työkaluja, ks. esim. https://www.wolframalpha.com

Yhteenveto toisen ja korkeamman asteen polynomifunktioista

- Toisen asteen polynomifunktio $f(x) = ax^2 + bx + c$
  - Kuvaaja on ylöspäin (alaspäin) aukeava paraabeli, jos $a > 0$ $(a < 0)$
  - Nollakohdat ratkaistaan kaavalla $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Korkeamman asteen polynomifunktion nollakohtien ratkaiseminen käsin on hankalampaa

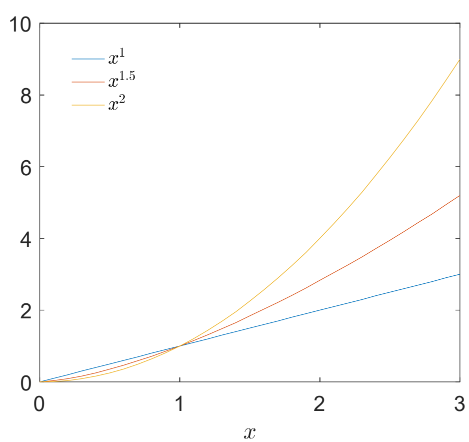
Potenssifunktio

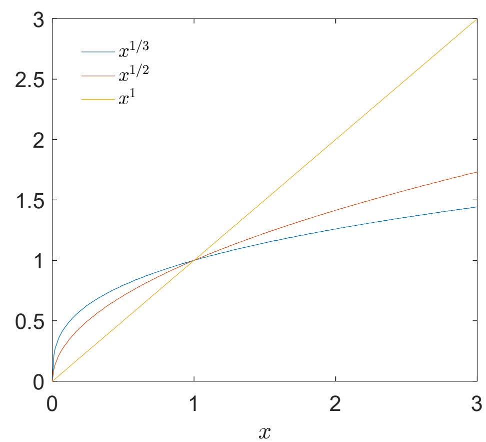
- **Potenssifunktio** on muotoa $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R}$

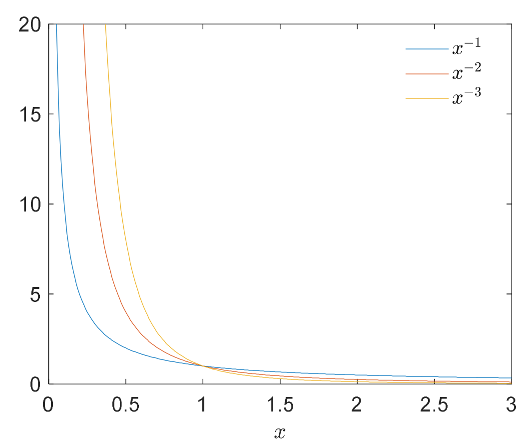
Esimerkkejä, kun $n > 1$:
- Kasvava marginaalihyöty
- Kasvava marginaalikustannus ("Diseconomies of scale")

Esimerkkejä, kun $0 < n < 1$:
- Laskeva marginaalihöyty
- Laskeva marginaalikustannus ("Economies of scale")

Esimerkkejä, kun $n < 0$:
- Tuotannon arvon kasvunopeus työvoimapanoksen funktiona
- Monet fysikaaliset ilmiöt (esim. gravitaatiovoima tai lampun valaisuteho etäisyyden funktiona)







Potenssifunktion laskusääntöjä

1. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, Esim. $x^2 \cdot x^3 = x^5$
2. $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$, Esim. $\frac{x^5}{x^2} = x^3$
3. $(x^n)^m = x^{nm}$, Esim. $(x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = x^2$
4. $(xy)^n = x^n y^n$, Esim. $(xy)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ Esim. $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$
6. $x^0 = 1$ Esim. $2^0 = 1$

Lisäksi käytetään merkintöjä

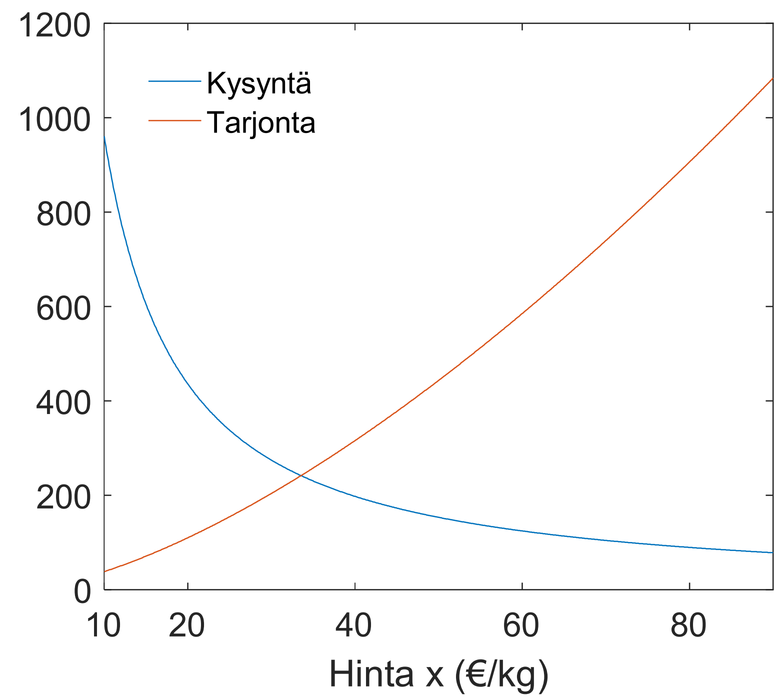
1. $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Esim. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
2. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. Esim. $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

Sovellus tasapainohinnoitteluun

- Esim. Ekonomisti tutki kultakalakaviaarin kysynnän ja tarjonnan (kg) riippuvuutta yksikköhinnasta *x* (€/kg):
  - Kysyntä $f(x) = 13262x^{-1.14}$
  - Tarjonta $g(x) = 1.16x^{1.52}$

- Markkinat ovat tasapainossa kysyntä- ja tarjontakäyrien leikkauspisteessä, eli kun kysyntä = tarjonta:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow$$
$$13262x^{-1.14} = 1.16x^{1.52} \Leftrightarrow$$
$$\frac{13262}{1.16} = \frac{x^{1.52}}{x^{-1.14}} = x^{1.52+1.14} = x^{2.66} \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{13262}{1.16}\right)^{\frac{1}{2.66}} = (x^{2.66})^{\frac{1}{2.66}} = x \Leftrightarrow$$
$$x \approx 33.54 \text{ €/kg}$$



Taukojumppa

Mätitahnan kysyntä ja tarjonta (t) riippuvat yksikköhinnasta h (€/kg) seuraavasti:

- Kysyntä $k(h) = 15h^{-1.3}$
- Tarjonta $t(h) = 0.05h^{1.5}$

Määritä tasapainohinta.

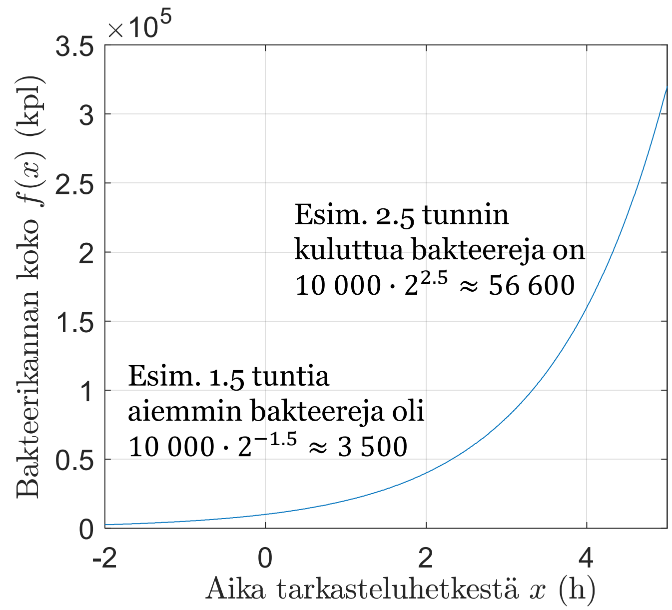
1. 7.67 €/kg
2. 8.67 €/kg
3. 9.67 €/kg

Eksponenttifunktio

- Eksponenttifunktio on muotoa $f(x) = a^x$, missä kantaluku $a > 0, a \neq 1$ on vakio

- Eksponenttifunktio sopii malliksi tilanteessa, jossa muuttujan suhteellinen muutos on vakio (vrt. geometrinen jono).

- Esim. Geenimuunneltujen bakteerien avulla tuotetaan lääkkeen *L* erästä raaka-ainetta. Käytetystä bakteerikannasta tiedetään, että sen koko kaksinkertaistuu tunnissa 20 °C lämpötilassa. Jos bakteeriviljelmässä on tällä hetkellä n. 10 000 bakteeria, kuinka suuri määrä on x tunnin kuluttua?
  - Tasatunneittain $x \in \mathbb{N}$ kyseessä on geometrinen lukujono $(a_x) = 10\,000 \cdot 2^x$
  - Sama tulos voidaan yleistää myös tilanteeseen, jossa $x \in \mathbb{R} \rightarrow$ bakteerikannan kehitystä ajan suhteen kuvaa eksponenttifunktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+,\ f(x) = 10\,000 \cdot 2^x$

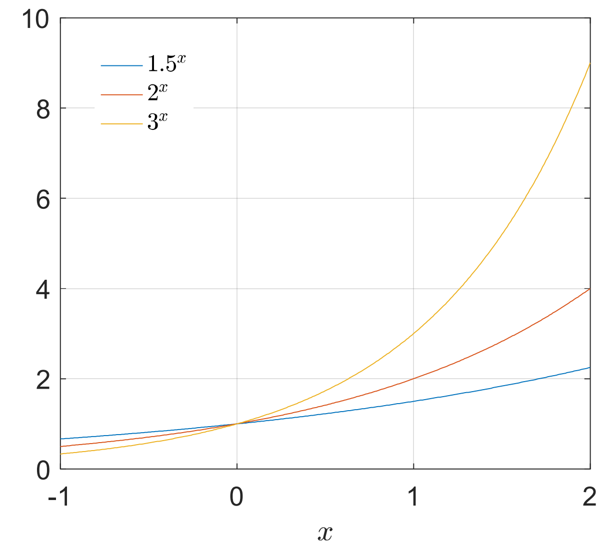


Eksponenttifunktion kuvaaja, kun *a* > 1

- Eksponenttifunktio $f(x) = a^x$ on kasvava, jos $a > 1$.
  - Esim. Kun alkupääoma on K ja korkokanta 5%, kertynyt pääoma ajan t funktiona on $f(t) = K \cdot 1.05^t$.

- Funktion arvo kasvavat nopeasti hyvin suuriksi → **eksponentiaalinen räjähdys**
  - Esim. Pena on ryhtynyt verkostomarkkinointiyrityksen myyjäksi. Hänen on itse rekrytoitava 5 uutta myyjää, joiden tulee taas kunkin rekrytoida 5 uutta myyjää jne.
  - Gold-tasolle päästäkseen (vuosiansio n. 15 000 €) Penan tulee saada alleen 5 myyjätasoa. Royal Diamond –tasolle päästäkseen (vuosiansio n. 600 000€) Penan tulee saada alleen 10 myyjätasoa.
  - Kuinka monta myyjää Gold- ja Royal Diamond –tasoille pääsemiseksi tarvitaan yhteensä?

  - Ratkaisu: Myyjien määrä tasojen lukumäärän x funktiona on $f(x) = 5^x$. Gold-tasolle tarvitaan siis $5^5 = 3125$ myyjää ja Royal Diamond –tasolle $5^{10} = 9\,765\,625$ myyjää.



Eksponenttifunktio e^x

- Tärkeä erikoistapaus $f(x) = e^x$
  - Esim. Kun alkupääoma on K, vuosikorko on 5% ja korkoa lisätään jatkuvasti, kertynyt pääoma ajan t funktiona on $f(t) = K \cdot e^{0.05t}$.
  - Funktio e^x esiintyy myös monien todennäköisyysjakaumien tiheysfunktiossa, esim:

$$\text{Normaalijakauma: } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\text{Eksponenttijakauma: } f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

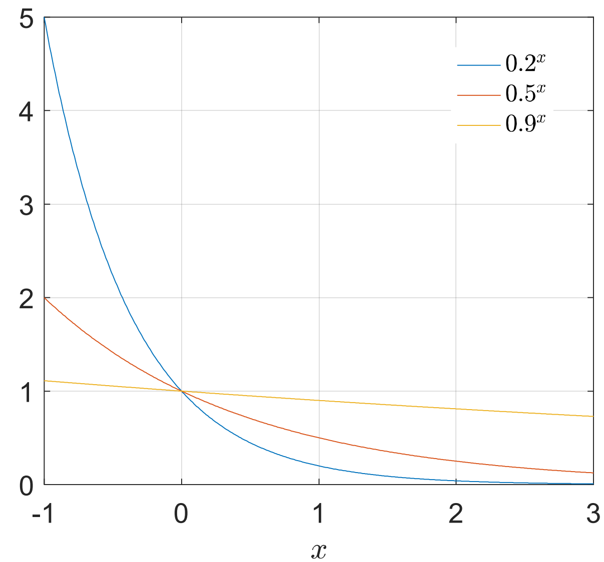
  - Funktion e^x derivointi (ja integrointi) on helppoa - tästä lisää myöhemmin

Eksponenttifunktion kuvaaja, kun *a* < 1

- Eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ on vähenevä, jos $a < 1$.
  - Esim. Kun auton arvo ostettaessa on K ja se alenee vuosittain 15%, on arvo ajan x funktiona $f(x) = K \cdot 0.85^x$.
  - Esim. Monet fysikaaliset ilmiöt, kuten radioaktiivisen aineen määrä ajan funktiona

- Eksponenttifunktion $f(x) = a^x$, $a < 1$ arvo lähenee nollaa x:n kasvaessa, muttei koskaan saavuta sitä

- Koska $a^0 = 1$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$, kaikki eksponenttifunktiot kulkevat pisteen (0,1) kautta (ks. myös kalvon 29 kuva).

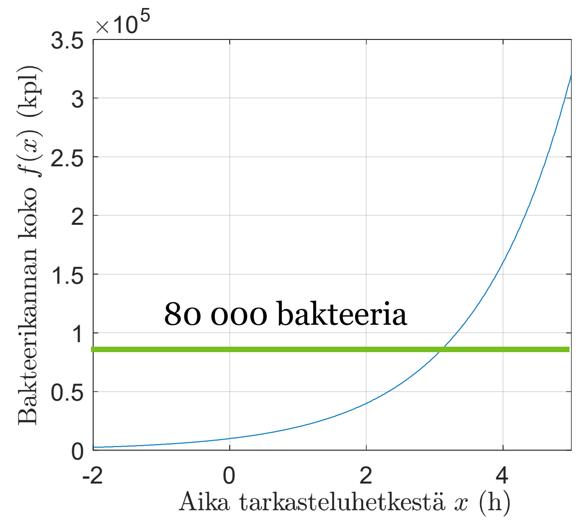


Potenssifunktion laskusäännöt pätevät myös eksponenttifunktiolle

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, Esim. $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, Esim. $\frac{3^x}{3^y} = 3^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$, Esim. $(2^x)^y = 2^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$, Esim. $6^x = (2 \cdot 3)^x = 2^x 3^x$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ Esim. $2^x = \left(\frac{4}{2}\right)^x = \frac{4^x}{2^x}$

Logaritmifunktio

Esim. Lääkeen *L* valmistuksessa käytettävän bakteerikannan suuruutta ajan y suhteen kuvaa funktio $f(y) = 10\,000 \cdot 2^y$. Kauanko kestää, että bakteereja on 80 000 kpl? Eli mikä on y:n arvo, kun $10\,000 \cdot 2^y = 80\,000 \Leftrightarrow 2^y = 8$?



Logaritmifunktio

$$y = f(x) = \log_a x, \qquad a > 0, a \neq 1, x > 0$$

vastaa kysymykseen:

"Mihin lukuun y kantaluku a pitää korottaa, jotta saadaan x"?

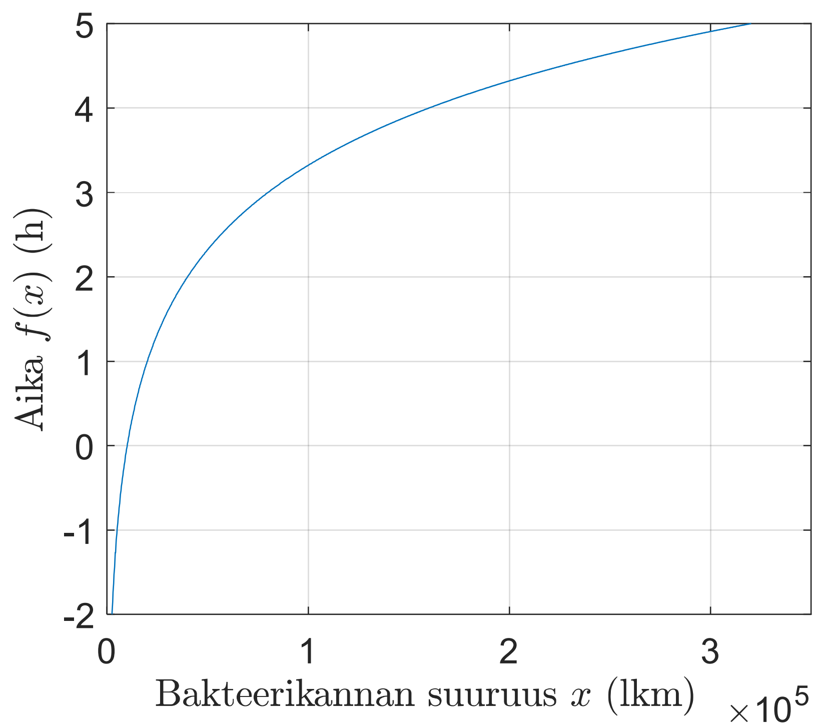
Edellä kantaluku 2 pitää korottaa 3. potenssiin, jotta saadaan 8 $\rightarrow y = \log_2 8 = 3$.

Logaritmifunktio

Yleisesti: Bakteerikannan suuruutta ajan y suhteen kuvaa funktio $f(y) = 10\,000 \cdot 2^y$. Kauanko kestää, että bakteereja on x kpl?

$$x = 10\,000 \cdot 2^y \Leftrightarrow$$
$$2^y = \frac{x}{10\,000} \Leftrightarrow$$
$$y = f(x) = \log_2 \frac{x}{10\,000}$$

Mihin lukuun 2 pitää korottaa, jotta saadaan $\frac{x}{10\,000}$?



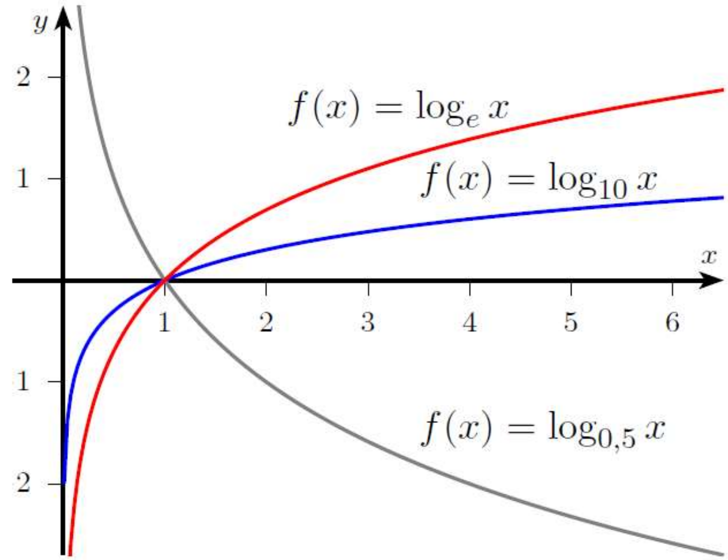
Logaritmifunktion ominaisuuksia

- Logaritmifunktio on
  - Kasvava x:n suhteen, kun kantaluku $a > 1$
  - Vähenevä x:n suhteen, kun kantaluku $a < 1$

1. $\log_a 1 = 0$, koska…

2. $\log_a a = 1$, koska…

3. $\log_a a^x = x$, koska…



Kuvalähde: https://www.cs.helsinki.fi/u/jhasa/kurssit/y100_s12/materiaali_osa6_y100_s12.pdf

Luonnollinen ja 10-kantainen logaritmi

- Tavallisesti käytetään lähinnä
  - e-kantaista eli luonnollista logaritmia $\ln x = \log_e x$
  - 10-kantaista eli Briggsin logaritmia $\lg x = \log_{10} x$

- Muu-kantaiset logaritmit saadaan helposti muutettua jompaankumpaan muotoon kaavalla $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
  - Esim. $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln} = \frac{\lg x}{\lg 2}$

- Tarkastelemme tästedes vain luonnollista logaritmia $\ln x$ - laskusäännöt pätevät kuitenkin myös muunkantaisille logaritmeille

Logaritmifunktion laskusäännöt

Tulon logaritmi on logaritmien **summa**:

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

Osamäärän logaritmi on logaritmien **erotus**:

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

Eksponentti hyppää **kertoimeksi**:

$$\ln x^d = d \ln x$$

Logaritmifunktion laskusäännöt

- Laskusääntöjä voi hyödyntää eksponentti- tai logaritmifunktioita sisältävän yhtälön ratkaisemisessa.

- Esim. Bakteerikannan suuruutta ajan y suhteen kuvaa funktio $f(y) = 10\,000 \cdot 2^y$. Kauanko kestää, että bakteereja on $50\,000$ kpl?

$$10\,000 \cdot 2^y = 50\,000 \Leftrightarrow 2^y = 5 \Leftrightarrow \ln 2^y = \ln 5 \Leftrightarrow y \ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow$$
$$y = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2h\ 19\ min$$

Taukojumppa

Mikä vaihtoehdoista on yhtäpitävä lausekkeen $\ln e^2 + \ln 2e$ kanssa?

1. $1 + \ln 2$
2. $2 \ln 2$
3. $3 + \ln 2$

Taukojumppa

Auton arvo on uutena 80 000 €, ja arvo vähenee 20% vuodessa. Kuinka pitkän ajan kuluttua auton arvo on 40 000 €?

1. 2 v 6 kk
2. 3 v 1 kk
3. 4 v 1 kk

Yhteenveto yleisimmistä funktiotyypeistä

- Potenssifunktio $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R}$ on yksinkertaisen polynomifunktion yleistys tilanteeseen, jossa eksponentti ei välttämättä ole positiivinen kokonaisluku.

- Eksponenttifunktio $f(x) = a^x$, missä kantaluku $a > 0, a \neq 1$ on vakio
  - Funktio kasvaa kiihtyvästi, jos $a > 1$
  - Funktio vaimenee nollaan, jos $a < 1$

- Logaritmifunktio $f(x) = \log_a x$ vastaa kysymykseen: "Mihin lukuun a pitää korottaa, jotta saadaan x"?
  - Funktio kasvaa vaimenevalla nopeudella, jos $a > 1$
  - Funktio vähenee vaimenevalla nopeudella, jos $a < 1$ (ei määritelty, jos a <0)

Yhteenveto yleisimmistä funktiotyypeistä

- a-kantainen logaritmi saadaan muutettua luonnolliseksi logaritmiksi kaavalla $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

- Logaritmin laskusäännöt:

1. $\ln xy = \ln x + \ln y,$
2. $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y\,,$
3. $\ln x^d = d \ln x$