1. Riski $R = f \cdot C$.

   (a) Tarkastellaan kuolemaan johtaneita onnettomuuksia.

   $$f_{bussi} = 130\frac{\text{kuolemaa}}{\text{vuosi}} \cdot 0.03\frac{\text{tulipalokuolemaa}}{\text{kuolemaa}} \cdot 0.08\frac{\text{bussimatkustajaa}}{\text{tulipalokuolema}} = 0.31\frac{\text{bussimatkustajaa}}{\text{vuosi}}$$

   $$f_{muut} = 130\frac{\text{kuolemaa}}{\text{vuosi}} \cdot 0.03\frac{\text{tulipalokuolemaa}}{\text{kuolemaa}} \cdot 0.92\frac{\text{ei-bussimatkustajaa}}{\text{tulipalokuolema}}$$
   $$= 3.59\frac{\text{ei-bussimatkustajaa}}{\text{vuosi}}$$

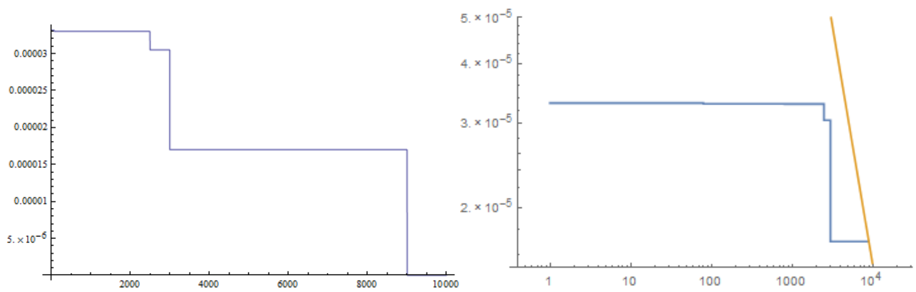
   (b) $f_{bussi} = 130\frac{\text{onnettomuutta}}{\text{vuosi}} \cdot 0.03 \cdot 0.08 \cdot \frac{1 \text{ vuosi}}{9500 \text{ mailia per bussi} \cdot 448\ 000 \text{ bussia}} = 7.33 \cdot 10^{-11}\frac{\text{kuolemantapausta}}{\text{maili}}$
   $f_{muut} = 130\frac{\text{onnettomuutta}}{\text{vuosi}} \cdot 0.03 \cdot 0.92 \cdot \frac{1 \text{ vuosi}}{9500 \text{ mailia per bussi} \cdot 448\ 000 \text{ bussia}} = 8.43 \cdot 10^{-10}\frac{\text{kuolemantapausta}}{\text{maili}}$

   (c) $R = 130\frac{\text{kuolemaa}}{\text{vuosi}} \cdot 0.03 \cdot \frac{1}{448\ 000 \text{ bussia}} \cdot t = 1 \cdot 10^{-6}\frac{\text{kuolemaa}}{\text{bussi}}$
   $\Rightarrow t = 0.115$ vuotta ≈ 42 päivää

2. (a) Järjestetään skenaariot menetystason mukaan ($C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_n$) ja lasketaan todennäköisyydet mentetystasojen saavuttamiselle:

Seuraus	Todennäköisyys	Todennäköisyys saavuttaa taso
C_1	p_1	$p_1 + p_2 + p_3 \ldots + p_n$
C_2	p_2	$p_2 + p_3 \ldots + p_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_{n-1}	p_{n-1}	$p_{n-1} + p_n$
C_n	p_n	p_n

Seuraus	Todennäköisyys	Todennäköisyys saavuttaa taso
80	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$3.3150 \cdot 10^{-5}$
800	$2.00 \cdot 10^{-8}$	$3.3020 \cdot 10^{-5}$
2500	$2.50 \cdot 10^{-6}$	$3.3000 \cdot 10^{-5}$
3000	$1.35 \cdot 10^{-5}$	$3.0500 \cdot 10^{-5}$
9000	$1.70 \cdot 10^{-5}$	$1.7000 \cdot 10^{-5}$



Farmerin käyrä: x-akselilla menetykset, y-akselilla todennäköisyys (aidosti) ylittää x. Vasemmalla lineaarinen asteikko, oikealla log-log-asteikko

Yleensä suuria tappioita halutaan välttää suhteessa enemmän kuin pieniä tappioita. Farmer esitti, että jos on hyväksyttävää, että seuraustaso x ylitetään todennäköisyydellä p, on myös hyväksyttävää, että seuraustaso $2x$ ylitetään todennäköisyydellä $p/2$ (myöhemmin tätä sääntöä on tarkennettu ja peräti standardoitu, lisää luennolla 9: riskivertailut). LogLog-asteikolla tämä relaatio muodostaa suoran, jota voidaan käyttää Farmerin käyrän määrittämän riskiprofiilin analysointiin.

Tässä tapauksessa vasemmanpuoleinen käyrästä huomaa, että Voimalan räjähdys muodostaa keskeisen osan laitoksen tapaturma-alittiudesta. Jos kuitenkin oletetaan, että Voimalan räjähdys skenaario voidaan sinänsä hyväksyä riskinä (sillä se on joka tapauksessa hyvin harvinainen), nähdään piirtämällä oikeanpuoliseen kuvaan Farmirin esittämä suora, että itse asiassa koko laitoksen riskiprofiili alittaa siedettävän rajan.

(b) Todennäköisyys, että kuolemantapauksia tulee yli sata vuodessa voidaan lukea taulukosta tai Farmerin käyrältä kohdasta $C \geq 800$ (todennäköisyys, että onnettomuudessa tulee uhreja $100 < C < 800 = 0$). Saadaan vastaukseksi:

$Pr(C \geq 100) = Pr(C \geq 800) = 3.3020 \cdot 10^{-5}$

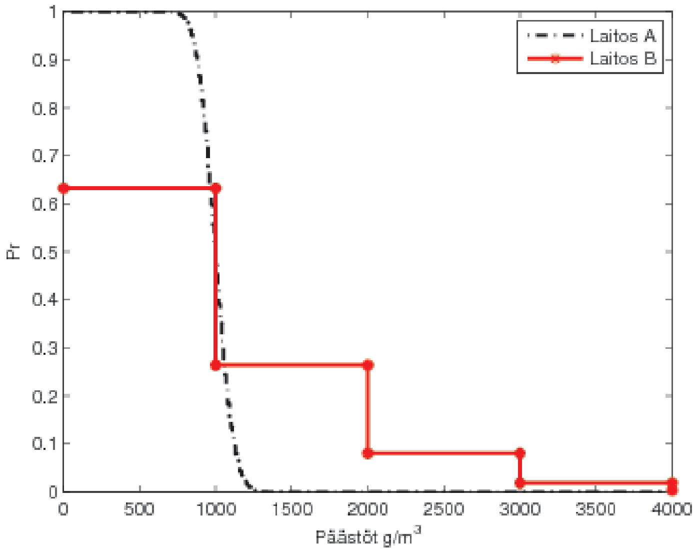
3. (a) Voimalaitostyyppien Farmerin käyrät saadaan määrittelemällä millä todennäköisyydellä tapahtuu vähintään k kpl rikkisuodattiminen rikkoutumisia kyseisille voimalatyypille. Oletetaan, että voimaloiden rikkisuodattimien rikkoutuminen on riippumaton muiden voimaloiden rikkisuodattimen rikkoutumisesta. Tällöin rikkisuodattimien rikkoutumisten lukumäärä K noudattaa binomijakaumaa parametrein n ja p, missä $n = 1000$ on voimaloiden lukumäärä ja p on rikkisuodattimien rikkoutumistodennäköisyys voimalatyypille. Todennäköisyys, että tasan k voimalaitosta vikaantuu on

$$Pr(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} ,$$

ja kun k rikkisuodatinta vikaantuu aiheutuu kokonaispäästö, joka on $k \cdot c$, missä c on päästön suuruus yhdestä rikkoutumisesta. Farmerin käyrät määrittää todennäköisyys

$$Pr(K > k) = 1 - Pr(K \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} ,$$

ja sitä vastaavat seuraamustasot $c = 10k$ (laitos A) ja $c = 1000k$ (laitos B), yksikkö $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}$. Kaavan perusteella voimalaitostyypille B todennäköisyys, että tappiotaso on yli $0\frac{g}{m^3}$ on $Pr(K > 0) = 1 - \binom{1000}{0} 0.001^0 (1-0.001)^{1000-0} \approx 0.632$ ja että tappiotaso on yli $1000\frac{g}{m^3}$ on $Pr(K > 1) = 1 - ((1-0.632) + \binom{1000}{1} 0.001^1 (1-0.001)^{1000-1}) \approx 0.264$.



Laitostyyppi A:n todennäköisyydet voidaan laskea myös approksimoimalla binomijakaumaa normaalijakaumalla: Jos muuttuja noudattaa binomijakaumaa parametrilla n ja p, voidaan sitä approksimoida normaalijakaumalla $\mathrm{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$ (seurausta suurten lukujen laista). Approksimaatio on hyvä jos n on suuri (yleensä $n > 20$) ja jos p ei ole lähellä 0 tai 1 (suhteessa n:ään). Tällöin voidaan laskea, että

$$Pr(K > k) = 1 - Pr(K \leq k) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) ,$$

missä Φ on standardinormaalijakauman kertymäfunktio. Kertymäfunktion Φ arvot löytyvät taulukoista, eli tarpeen tullen Farmerin käyrä voidaan laskea jopa käsin.

Laitostyyppiä B käsitellessä nähdään jo Farmerin käyrästä (josta oleellisesti kertymäfunktio käy ilmi), että approksimointi normaalijakaumalla, joka on jatkuva ja symmetrinen, ei voi antaa kovinkaan hyvää tulosta. Tässä kuitenkin todennäköisyydet pienenevät nopeasti mitättömän pieniksi, eli vaikka periaatteessa olisi mahdollista, että yli 10 suodatinta rikkoontuu samanaikaisesti, mikä aiheuttaisi 10 000 g/m^3 päästöt, on se niin epätodennäköistä (tn $< 10^{-9}$), että siihen liittyvä riski voidaan jättää tarkastelun ulkopuolelle. Näin ollen voitaisiin myös tämä todennäköisyys laskea käsin.

Tarkat Farmerin käyrät voidaan piirtää esim. Mathematicalla. Ohessa Matlab-koodi:

```
N_laitokset=1000;x=[0:1:N_laitokset];
PrA=0.1;PrB=0.001;
SO2A=10;SO2B=1000;
figure;
stairs(x.*SO2A,1-binocdf(x,N_laitokset,PrA),'k-.','LineWidth',2);
hold␣on;
stairs(x.*SO2B,1-binocdf(x,N_laitokset,PrB),'r-*','LineWidth',2);
legend('Laitos␣A','Laitos␣B');
```

```
xlabel('Päästöt␣g/m^3');ylabel('Pr');
xlim([0␣4000]);ylim([0␣1]);
```

(b) Laitostyyppi A aiheuttaa yli 1000 g/m^3 rikkidioksidipäästön 47% todennäköisyydellä. Vastaavasti laitostyyppi B 26% todennäköisyydellä. Arvot voidaan katsoa Farmerin käyrästä.

(c) Laitostyyppi A aiheuttaa yli 2000 g/m^3 rikkidioksidipäästön 0% todennäköisyydellä. Vastaavasti laitostyyppi B 8% todennäköisyydellä.

(d) Tiedetään, että laitostyypin B rikkoutuessa vapautuu 1000 g/m^3 tällöin sallitu 2000 g/m^3 raja ylittyy, jos suodattimia rikkoutuu enemmän kuin 2 kpl. Määritetään haluttu rikkoutumistodennäköisyys: $Pr(K > 2) = 5\% \Rightarrow 1 - Pr(K \leq 2) = 5\%$. Ratkaisu esim. Mathematican Solve komennolla antaa vastauksen $p \approx 0.000818175$. Rikkisuodattimien vikaantumistodennäköisyyttä on siis vähennettävä noin 20 %.

Käytännössä vikaantumistodennäköisyyttä voitaisiin pienentää esim. vaihtamalla laadukkaampiin suodattimiin, vähentämällä suodattimen rasitusta(eli vähentämällä laitoksen tehoa), parantamalla suodattimen huoltoa tai lisäämällä varasuodattimia.

4. Verrataan teknologioiden aggregoituja riskejä. Riski $R = \sum_{i=1}^{N} P_i C_i$, missä P_i on seurauksen i todennäköisyys ja C_i on seurauksen i taso. Jatkuville funktioille $R = \int_0^{\infty} P(x)C(x)dx$, missä x on altistustaso.

Teknologialle A:

$$C(x) = 10^x \qquad P(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{2}{25}x, 0 \leq x \leq 5 \\ 0 \qquad ,x > 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
R_A &= \int_0^5 C(x)P(x)dx \\
&= \int_0^5 (\frac{2}{5} - \frac{2}{25}x)10^x dx \\
&= \frac{2}{5}\int_0^5 10^x dx - \frac{2}{25}\int_0^5 x10^x dx \\
&= \frac{2}{5}\int_0^5 10^x dx - \frac{2}{25}\Big(\Big|_0^5 \frac{x10^x}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10}\int_0^5 10^x dx\Big) \\
&= \frac{2}{5}\Big|_0^5 \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{2}{25}\Big(\Big|_0^5 \frac{x10^x}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10}\Big|_0^5 \frac{10^x}{\ln 10}\Big) \\
&= \frac{2}{5}(\frac{10^5 - 1}{\ln 10}) - \frac{2}{25}\Big(\frac{5 \cdot 10^5}{\ln 10} - 0 - \frac{1}{\ln 10}(\frac{10^5 - 1}{\ln 10})\Big) \approx 1508.7
\end{aligned}$$

Teknologialle B:

$$C(x) = 100x \qquad P(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \qquad ,x > 4 \end{cases}$$

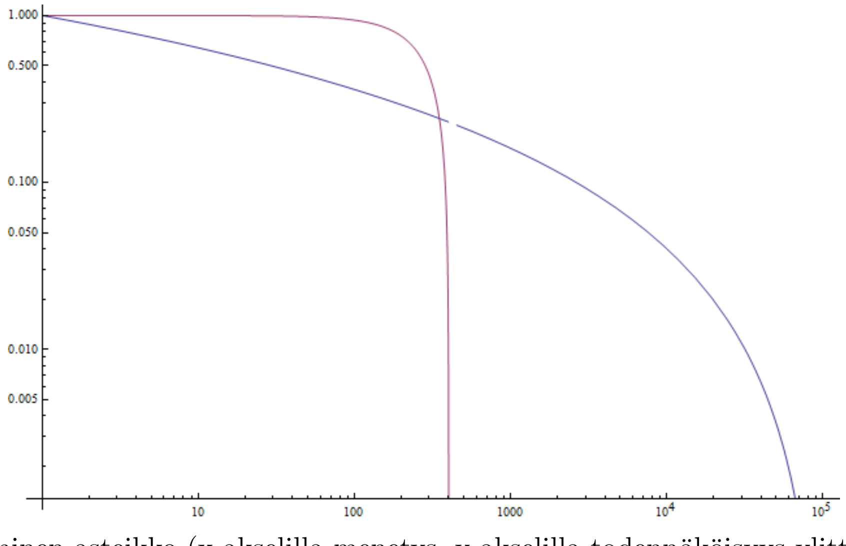
$$\begin{aligned} R_B &= \int_0^4 C(x)P(x)dx + \int_4^\infty C(x)P(x)dx \\ &= \int_0^4 100x \cdot \frac{x}{8}dx + \int_4^\infty 100x \cdot 0dx \\ &= \int_0^4 \frac{100}{8}x^2 dx = \frac{100}{24}\Big|_0^4 x^3 \\ &= \frac{25}{6}\,4^3 \approx 266.7 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ teknologiassa A on suurempi odotusarvoinen menetys.

Riskejä voi verrata myös Farmerin käyrän avulla. Todennäköisyys ylittää altistustaso x saadaan kaavalla

$$\pi(x) = \ 1 - \int_0^x P(t)\,dt \ ,$$

jolloin todennäköisyys ylittää menetys c saadaan sijoittamalla yllä olevaan kaavaan $x = C^{-1}(c)$, missä C^{-1} on menetysfunktion käänteisfunktio (teknologialle A: $C^{-1}(c) = \ln c / \ln 10$ ja teknologialle B: $C^{-1}(x) = c/100$). Farmerin käyrä saadaan siis piirtämällä käyrä $\pi(C^{-1}(c))$.



Log-logaritminen asteikko (x-akselilla menetys, y-akselilla todennäköisyys ylittää menetys, Teknologia A = sininen käyrä ja Teknologia B = violetti käyrä)