Onsdag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast onsdag kl. 08:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast fredag kl. 12:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)

HA1. Tiden T det tar att hitta och åtgärda felet i en printer är en kontinuerlig slumpvariabel, vars täthetsfunktion ges av $f_T(t) = 1/3h$ för $0h < t < 3h$ (och $f_T(t) = 0/h$ annars). Kostnaden att åtgärda felet beror på tiden och ges av $g(t) = (50 + 10 \cdot \sqrt{3t/h})$ euro för $0h < t < 3h$. Beräkna väntevärdet för kostnaden.

HA2. Ett visst experiment (t.ex. att få krona, då vi singlar en eventuellt böjd slant) har sannolikheten $p \in]0, 1[$ att lyckas (och följdaktligen sannolikheten $1-p$ att misslyckas). Vi utför experimentet tills det lyckas. Låt den diskreta slumpvariabeln X vara antalet gånger vi därvid utför experimentet, så $X \in S_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Bestäm frekvensfunktionen $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ för X och beräkna dess väntevärde $\mu_X = \mathbb{E}[X]$, varians $\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ och standardavvikelse $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$. (En sådan slumpvariabel X säges vara *geometriskt fördelad* med parametern p. Detta betecknas $X \sim Geom(p)$.)
(Geometriska serien $\frac{1}{1-q} = \{|q| < 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$, termvis deriverade geometriska serien
$\frac{d}{dq}(\frac{1}{1-q}) = \frac{1}{(1-q)^2} = \{|q| < 1\} = \frac{d}{dq}(\sum_{k=0}^{\infty} q^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$
samt två gånger termvis deriverade geometriska serien
$\frac{d^2}{dq^2}(\frac{1}{1-q}) = \frac{2}{(1-q)^3} = \{|q| < 1\} = \frac{d}{dq}(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(k \cdot q^{k-1}) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot q^{k-2}$
från DiffInt1 kan vara till nytta. Likaså kan det till synes triviala påpekandet att $n^2 = (n^2 - n) + n$ vara till en viss hjälp.)

- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)

IA1. De diskreta slumpvariablerna X_1 och X_2 är oberoende ($X_1 \perp X_2$) och har samma fördelning med utfallsrummet $S_X = \{-1, 0, 1\}$ och frekvensfunktionen $f_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{3}$, då $k \in S_X$.
Vi definierar nya diskreta slumpvariabler $U = X_1 + X_2$ och $V = X_1 \cdot X_2$.
a) Beräkna väntevärdena $\mu_U = \mathbb{E}(U)$ och $\mu_V = \mathbb{E}(V)$.
b) Beräkna $\mathbb{P}(U = 0|V = 0)$ och $\mathbb{P}(V = 0|U = 0)$.
c) Beräkna covariansen $Cov(U, V)$.
d) Avgör huruvida U och V är oberoende ($U \perp V$) eller beroende ($U \not\perp V$).

IA2. Geometriska fördelningen "saknar minne" i bemärkelsen att sannolikheten för att vi måste utföra experimentet totalt minst $m + n$ gånger, om vi redan har behövt utföra det m gånger (utan att lyckas) är densamma som att vi måste utföra experimentet totalt minst n gånger. Matematiskt kan detta formuleras som

$$\mathbb{P}(X \geq m + n | X > m) = \mathbb{P}(X \geq n)$$

Verifiera detta för en slumpvariabel X, som är geometriskt fördelad med parametern $p \in]0, 1[$.
(En konsekvens av detta är att om vi singlat en rättvis slant 1000 gånger i rad utan att få klave, så är sannolikheten ändå 50% att få klave vid nästa singling.)

Fredag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast söndag kl. 24:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)

HB1. Två identiska kortlekar (med vardera 52 kort, så totalt 52 par: två hjärter Ess, två hjärter Kungar,..., två klöver tvåor) blandades och därefter plockades slumpmässigt 26 kort bort ur högen. Beräkna väntevärdet för antalet par, som återstår i högen.
Gott råd: Låt den diskreta slumpvariabeln X_i få värdet 1, om par i (t.ex. med numreringen ovan) finns kvar och värdet 0, om åtminstone ett av korten i paret plockats ut. Antalet återstående par ges då av slumpvariabeln $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{52}$.

HB2. Om Y är en diskret slumpvariabel, som kan approximeras med en kontinuerlig slumpvariabel U, så kan $\mathbb{P}(Y = k)$ approximeras med $\mathbb{P}(k - \frac{1}{2} < U < k + \frac{1}{2})$. Detta kallas för halvkorrektion och ger i allmänhet bättre approximationer än $\mathbb{P}(k - 1 < U < k)$ och $\mathbb{P}(k < U < k + 1)$.
En partikel rör sig längs en linje så att den under varje tidssteg rör sig antingen ett steg åt vänster, ett steg åt höger eller står kvar. Sannolikheten att den rör sig åt vänster är $2/5$ och likaså sannolikheten att den rör sig åt höger, oberoende av tidigare rörelser, så sannolikheten att den står kvar är $1/5$.
Låt slumpvariabeln X_i få värdet -1, om partikeln rör sig åt vänster, värdet 0 om den står kvar och värdet 1, om den rör sig åt höger under tidssteg i. Låt slumpvariabeln $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
a) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för slumpvariabeln X_i.
b) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för slumpvariabeln S_{100}.
c) Använd normalapproximationen för att approximera sannolikheten $\mathbb{P}(|S_{100}| > 10)$.
Använd halvkorrektion och avrunda svaret till hela procent.

- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast söndag kl. 24:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)

IB1. En målarfirma skall måla utsidan av en oljecistern. Vid målningen inträffar det slumpmässiga fel (luftblåsor i färgen, små sprickor, då färgen torkar osv.). Antalet fel per areaenhet är Poisson-fördelat med väntevärdet 2.5 fel/m^2. Oljecisternens area är $1000m^2$, så man kan förvänta sig att det kommer att uppstå ungefär 2500 fel. Använd normalapproximation med halvkorrektion för att approximera sannolikheten för att det uppstår fler än 2560 fel vid målningen.

IB2. Exponential-fördelningen "saknar minne" i bemärkelsen att sannolikheten för att vi måste vänta mer än tiden $t_1 + t_2$ för att händelsen skall inträffa, om vi redan väntat tiden t_1 är densamma som att vi måste vänta mer än tiden t_2 från början. Matematiskt kan detta formuleras som

$$\mathbb{P}(T > t_1 + t_2 | T > t_1) = \mathbb{P}(T > t_2)$$

Verifiera detta för en slumpvariabel T, som är exponential-fördelad med parametern $\lambda > 0$.
(Gott råd: Visa först att $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ för $t > 0$.)

- Temat för Stack-uppgifterna (som fås via länken på kursens hemsida i MyCourses och som skall vara attackerade senast söndag kl. 24:00 ifrågavarande vecka)
S1. Väntevärde och standardavvikelse
S2. Geometriska fördelningen och exponential-fördelningen
S3. Normalfördelningen
S4. Normalapproximation
S5. Dito