Onsdag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast onsdag kl. 08:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast fredag kl. 12:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)

HA1. N personer deltar i en julfest. Då de anländer till festen, lägger de varsin julklapp i Stora Säcken och senare på kvällen kommer den Gamle Bocken och delar ut julklapparna, så var och en får slumpmässigt en julklapp. Därvid kan det naturligtvis hända att en eller flera personer får tillbaka sin egen julklapp. Låt slumpvariabeln Y_N vara antalet personer bland dessa N, som får tillbaka sin egen julklapp. Beräkna väntevärdet $\mu_{Y_N} = \mathbb{E}(Y_N)$ för detta antal.
(Gott råd: Låt slumpvariabeln $X_i = 1$, om person nummer i får tillbaka sin julklapp och $= 0$ annars för $i = 1, 2, \ldots, N$. I så fall är $Y_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$. Jämför även med uppgift IA2, övning 1.)

HA2. 31.12.2015 var åldersfördelningen hos Finlands befolkning som i tabellen till höger.
a) Rita ett histogram över åldersfördelningen (där man som övre gräns för åldern kan välja 110 år) så att enheten för horisontella axeln är år och för vertikala axeln procent per år och kontrollera, att totala "arean" hos histogrammet är 100%.
b) Fanns det fler 10-åringar eller 30-åringar i Finland då? Fler 1-åringar eller 66-åringar? Uppskatta mha. histogrammet.

Ålder (år)	Antal
$0-14$	896023
$15-24$	640387
$25-44$	1363155
$45-64$	1464640
$65-74$	642428
$75-$	480675

- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)

IA1. Vi kastar en tärning 24000 gånger. Approximera sannolikheten att antalet 4:or finns i det slutna intervallet $[3920, 4160]$. Använd normalapproximationen och halvkorrektion.
(Gott råd: Låt slumpvariabeln X_i få värdet 1, om vi får en 4:a vid kast i och värdet 0 annars. Låt slumpvariabeln $Y = \sum_{i=1}^{24000} X_i$. Vi vill alltså approximera $\mathbb{P}(3920 \leq Y \leq 4160)$.)

IA2. Svakar hade inhandlat ett stort antal komponenter, vilkas livslängder kunde antas vara exponential-fördelade (jämför med uppgift IA2, övning 2). För att få en uppfattning av livslängdernas väntevärde $1/\lambda$ mätte han livslängderna t_1, t_2 resp. t_3 hos tre komponenter och beräknade skattningen $\widehat{1/\lambda} = (t_1 + t_2 + t_3)/3$ av livslängdens väntevärde $1/\lambda$.
Han bestämde också ett s.k. konfidensintervall $[t_-, t_+] = [min\{t_1, t_2, t_3\}, max\{t_1, t_2, t_3\}]$ för $1/\lambda$.
a) Beräkna $\mathbb{P}(T \leq \frac{1}{\lambda})$ och $\mathbb{P}(T \geq \frac{1}{\lambda})$, om T är exponential-fördelad med parametern λ.
b) Beräkna $\mathbb{P}(T_- \geq \frac{1}{\lambda})$ och $\mathbb{P}(T_+ \leq \frac{1}{\lambda})$, där $T_- = min\{T_1, T_2, T_3\}$ och $T_+ = max\{T_1, T_2, T_3\}$ och slumpvariablerna T_1, T_2 samt T_3 är livslängderna hos tre komponenter.
c) Beräkna $\mathbb{P}(T_- \leq \frac{1}{\lambda} \leq T_+)$, dvs. sannolikheten att det intervall han får via sitt (slumpmässiga) val av tre komponenter faktiskt innehåller (det okända) väntevärdet $\frac{1}{\lambda}$. Detta kallas för konfidensgraden hos konfidensintervallet.
d) Visa att $\bar{T} = (T_1 + T_2 + T_3)/3$ även är maximum likelihood-skattningen av $\frac{1}{\lambda}$, dvs. det värdet på genomsnittliga livslängden $\frac{1}{\lambda}$, för vilket sannolikheten att få just utfallet $\{T_1, T_2, T_3\}$ är störst.

Fredag

- Hemtal (som löses hemma före räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast fredag kl. 12:00. På räkneövningen presenteras lösningarna, varefter hemtalen bedöms av några kamrater senast söndag kl. 24:00. Sätt namn (läsligt!) på varje svarspapper.)

HB1. En urna innehåller 16 kulor, somliga svarta och somliga vita. Vi plockade slumpmässigt upp tre kulor ur urnan. Två av dem var svarta och en var vit. Därefter lade vi tillbaka dessa tre kulor i urnan. Bestäm maximum likelihood-skattningen av antalet svarta kulor i urnan, dvs. det antal, för vilket sannolikheten att få just det utfall vi fick är störst (och detta antal måste naturligtvis vara ett heltal).

HB2. Den kontinuerliga slumpvariabeln Y har täthetsfunktionen $f(y,\theta) = \frac{4}{\theta^4} \cdot y \cdot (\theta^2 - y^2)$ för $0 \le y \le \theta$ och 0 annars, där $\theta > 0$ är en okänd positiv parameter. Vi fick stickprovet 1.24, 0.63, 0.88, 1.07 och 0.98 ur denna fördelning, så vi får omedelbart att $\theta \ge 1.24$. Använd momentmetoden för att bestämma punktskattningen $\widehat{\theta_{MM}}$ av parametern θ, dvs. det värdet på parametern θ, som gör att väntevärdet $\mu_Y = \mathbb{E}(Y)$ blir lika med stickprovets medelvärde.

- Inlämningsuppgifter (som attackeras före, under och efter räkneövningen och lämnas in för bedömning i motsvarande mapp på kursens hemsida under rubriken Uppgifter senast söndag kl. 24:00. Sätt åter namn och även studienummer på varje svarspapper.)

IB1. Svakar vill skatta den okända parametern m hos en Poisson-fördelad slumpvariabel X (se uppgift IB1, övning 2). Han tänker ta ett stickprov $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ från $Po(m)$ (bestående alltså av icke-negativa heltal). Härled formeln för maximum likelihood-skattningen $\widehat{m_{ML}}$ av parametern m, dvs. det värdet på m, för vilket sannolikheten att få just utfallet $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ är störst.

IB2. Låt $\theta > 0$. En kontinuerlig slumpvariabel Y med täthetsfunktionen $f_Y(y) = \theta \cdot y^{-(\theta+1)}$ för $y \ge 1$, $f_Y(y) = 0$ annars, säges vara *Pareto-fördelad* med parametern θ.
a) Visa att detta faktiskt är en täthetsfunktion för en slumpvariabel. Beräkna väntevärdet $\mu_Y(\theta)$ (väntevärdet kommer att bero på parametern θ), då $\theta > 1$. (Då $\theta \in]0, 1]$, har slumpvariabeln Y oändligt väntevärde.)
b) Bestäm momentmetod-skattningen $\widehat{\theta_{MM}}$ och maximum likelihood-skattningen $\widehat{\theta_{ML}}$ av θ, som fås ur ett stickprov $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_m\}$ av Y. Beräkna sedan dessa två skattningar av θ för stickprovet $\{1.364, 2.558, 1.325, 1.289, 1.279\}$.

- Temat för Stack-uppgifterna (som fås via länken på kursens hemsida i MyCourses och som skall vara attackerade senast söndag kl. 24:00 ifrågavarande vecka)
S1. Normal-approximation
S2. Centrala Gränsvärdessatsen
S3. Stickprovsmedelvärde och -varians
S4. Maximum likelihood-skattning
S5. Skattning av parametrar