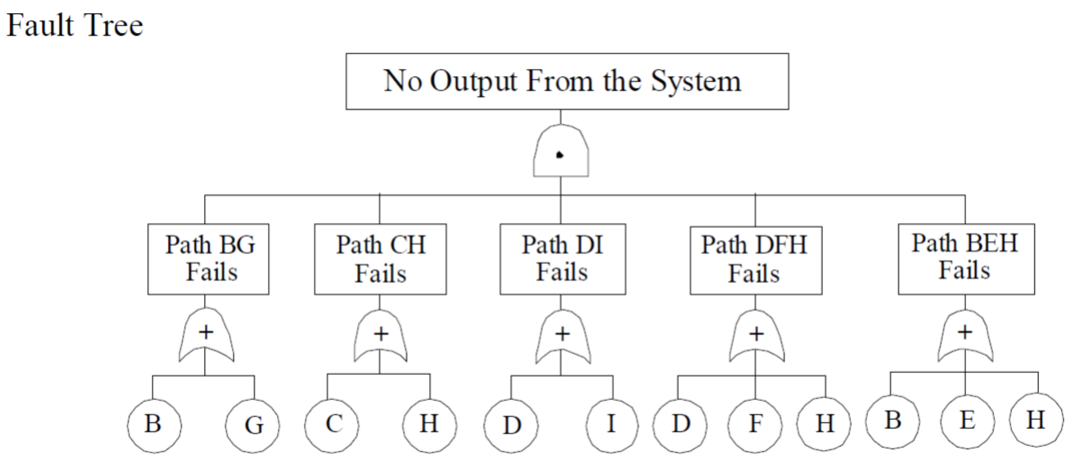
1. (a) Vikapuu:



(b) $T = (B+G)(C+H)(D+I)(D+F+H)(B+E+H)$

Käyttäen Boolen-algebran laskusääntöjä (voit helposti todentaa ne totuustaulukon avulla):
(1) $A + A = A$
(2) $A \cdot A = A$
(3) $A \cdot (A + X) = A + A \cdot X = A$
$\Rightarrow T = BCD + BCFI + BDH + BHI + CDEG + CEFGI + DGH + GHI$

Huomaa, että kaikkia sulkuja ei kannata kertoa auki ennen kuin käytät laskusääntöjä: Termejä tule tällöin nimittäin $2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3 = 216$ kpl. Kertomalla sopivat sulut keskenään ja sieventämällä välissä saa laskut tehtyä huomattavasti pienemmällä työmäärällä. Esim. laskareissa kerrottiin ensin $(B+G)(B+E+H) = B(B+E+H)+G(B+E+H) = B+BG+EG+GH = B+EG+GH$. Vastaavasti saatiin, että $(D+I)(D+F+H) = D+FI+HI$. Edelleen $(C+H)(B+EG+GH) = CB + CEG + BH + GH$ ja lopuksi $(D + FI + HI)(BC + CEG + BH + GH)$ kerrottiin auki termeittäin (12 kpl), joista voitiin vielä sieventää osa pois, jonka jälkeen saatiin yllä oleva tulos.

(c) Pr(Komponentti vikaantuu) = 0.05

$$\begin{aligned}\Pr(\mathrm{T}) &\approx \Pr(BCD) + \Pr(BCFI) + \Pr(BDH) + \Pr(BHI)\\ &\quad + \Pr(CDEG) + \Pr(CEFGI) + \Pr(DGH) + \Pr(GHI)\\ &= 5 \cdot (0.05)^3 + 2 \cdot (0.05)^4 + (0.05)^5\\ &\approx 0.000637^*\end{aligned}$$

*Koska tapahtumat eivät yleisesti ole toisensa poissulkevia, on saatu todennäköisyys *yläraja* koko systeemin vikaantumistodennäköisyydelle. Tarkkaa todennäköisyyttä laskiessa pitää tapahtumien leikkaavuudet vähentää summasta (esim. BCD ja BCFI tapahtuvat, jos BCDFI tapahtuu, eli tapahtumat eivät ole toisensa poissulkevia). Kahdella tapahtumalla tämä vastaa kaavaa $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Venn diagrammi; yleistyy myös n:lle tapahtumalle; ks luentokalvot). Todennäköisyyksien ollessa "pieniä", ns. *harvinaisten tapahtumien approksimaatio* on yleensä riittävä (kts. *rare event approximation*: Modarres, s. 350). Se on myös yleisesti käytössä sekä tutkimuksessa että sovelluksissa, jotka liittyvät todennäköisyyspohjaiseen luotettavuusanalyysiin.

Ylläolevassa esimerkissä pelkästään kolmen komponentin katkosjoukot (5 kpl) muodostavat riskin 0.000625 eli 98% kokonaisriskistä.

Tarkka arvo on $\Pr(T) = \frac{15503659}{25600000000} \approx 0.0006056116796875$ (laskettu tietokoneella).

2. Hyvä esimerkki XOR portista vikaapuuanalyysissä on kaksi-moottorisen raketin lähtö. Jos molemmat rakettimoottorit tomivat tai kumpikaan ei laukea, ei synny onnettomuutta. Mutta jos vain toinen laukeaa, mutta toinen ei, niin raketti heittää kuperkeikan ja onnettomuus tapahtuu.

   Kaksi kolmesta portista voisi kuvata kolmea voimalaitosta, jotka toimittavat sähköä kaupunkiin. Kaupungin tarvitsema sähkö voidaan tuottaa kahdella voimalalla, mutta yksi ei enää riitä. Näin ollen kahden tai useamman voimalan vikaantuminen aiheuttaa sähkökatkoksen.

   (a)

$$\begin{aligned}T_1 &= G_1 \cdot G_2\\ G_1 &= A + B\\ G_2 &= C \cdot \overline{D} + \overline{C} \cdot D\\ T_1 &= A \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D} + B \cdot \overline{C} \cdot D\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2 &= E \cdot G_3\\ G_3 &= F \cdot G + F \cdot H + G \cdot H\\ T_2 &= E \cdot F \cdot G + E \cdot F \cdot H + E \cdot G \cdot H\end{aligned}$$

Minimikatkosjoukot vikapuulle T_1 ovat

$$\begin{aligned} C_1 &= \{A, C, \overline{D}\} \\ C_2 &= \{A, \overline{C}, D\} \\ C_3 &= \{B, C, \overline{D}\} \\ C_4 &= \{B, \overline{C}, D\} \end{aligned}$$

Minimikatkosjoukot vikapuulle T_2 ovat

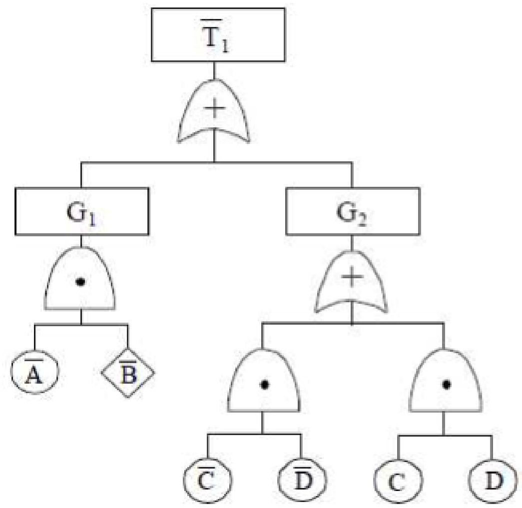
$$\begin{aligned} C_5 &= \{E, F, G\} \\ C_6 &= \{E, F, H\} \\ C_7 &= \{E, G, H\} \end{aligned}$$

(b) Minimipolkujoukot saadaan De Morganin lakeja käyttäen:

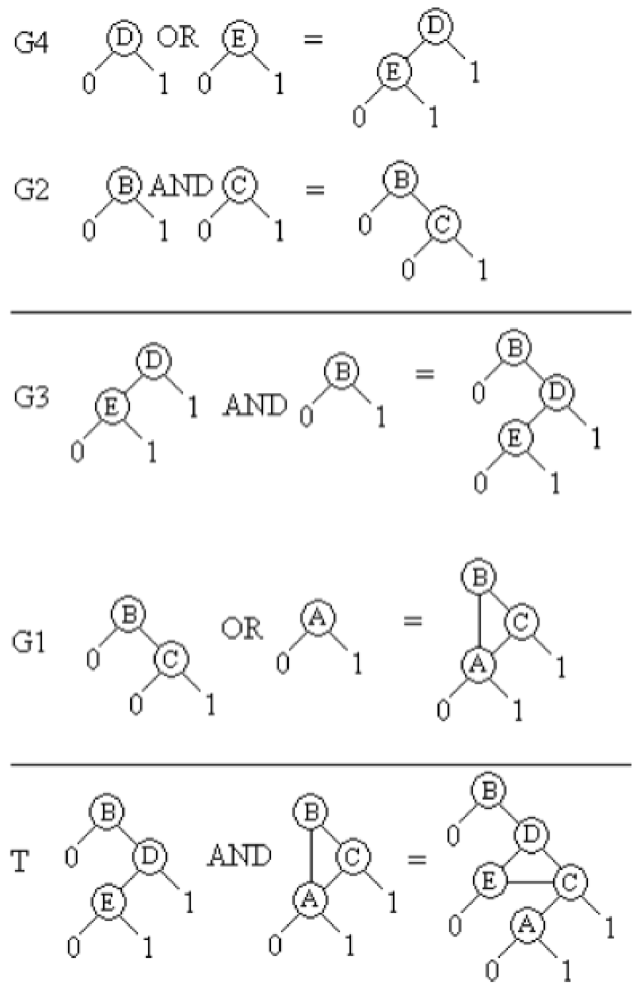
$$\begin{aligned} \overline{T}_1 &= \overline{A \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot D \cdot \overline{C} + B \cdot C \cdot \overline{D} + B \cdot D \cdot \overline{C}} \\ &= \left(\overline{A \cdot C \cdot \overline{D}}\right) \cdot \left(\overline{A \cdot D \cdot \overline{C}}\right) \cdot \left(\overline{B \cdot C \cdot \overline{D}}\right) \cdot \left(\overline{B \cdot D \cdot \overline{C}}\right) \\ &= \left(\overline{A} + \overline{C} + D\right) \cdot \left(\overline{A} + \overline{D} + C\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{C} + D\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{D} + C\right) \\ &= \left(\overline{A} + \overline{C} \cdot \overline{D} + D \cdot C\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{C} \cdot \overline{D} + D \cdot C\right) \\ &= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot C \cdot D + \overline{C} \cdot \overline{D} \cdot \overline{B} + D \cdot C \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot \overline{D} + D \cdot C \\ &= \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{C} \cdot \overline{D} + D \cdot C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{T}_2 &= \overline{E \cdot F \cdot G + E \cdot F \cdot H + E \cdot G \cdot H} \\ &= \overline{E \cdot F \cdot G} \cdot \overline{E \cdot F \cdot H} \cdot \overline{E \cdot G \cdot H} \\ &= \left(\overline{E} + \overline{F} + \overline{G}\right) \cdot \left(\overline{E} + \overline{F} + \overline{H}\right) \cdot \left(\overline{E} + \overline{G} + \overline{H}\right) \\ &= \left(\overline{E} + \overline{F} + \overline{G} \cdot \overline{H}\right) \cdot \left(\overline{E} + \overline{G} + \overline{H}\right) \\ &= \overline{E} + \overline{F} \cdot \overline{G} + \overline{F} \cdot \overline{H} + \overline{G} \cdot \overline{H} \end{aligned}$$

(c) Minimipolkujoukoista voidaan päätellä toimintapuut, jotka ovat (loogisesti) käänteisiä vikapuita:



3. Aloitetaan perustapahtumia sisältävistä porteista ja hyödynnetään logiikkasääntöjä: $1 \cdot X = X$, $0 \cdot X = 0$, $1 + X = 1$ ja $0 + X = X$.
Kun yhdistetään kaksi kaaviota, valitaan toinen "primäärikaavioksi" ja kiinnitetään joko sen 0-solmuihin (OR-tapauksessa) tai 1-solmuihin (AND-tapauksessa) toinen kaavio. Tämän jälkeen kaaviota voidaan yleensä redusoida.



Binäärisiä päätöskaavioita voidaan käyttää toisistaan poissulkevien vikaantumispolkujen laskemiseen, mikä puolestaan auttaa tarkan todennäköisyyden laskemisessa huipputapahtumalle. Polut saadaan seuraamalla 1:siin ("tapahtuu") johtavia polkuja, esim. $B \rightarrow \overline{D} \rightarrow E \rightarrow \overline{C} \rightarrow A$. Näin saadaan toisensa poissulkevia skenaariota aikaan, joten jos näiden polkujen todennäköisyydet lasketaan, voidaan järjestelmän vikaantumistodennäköisyys laskea.