

Luento 5

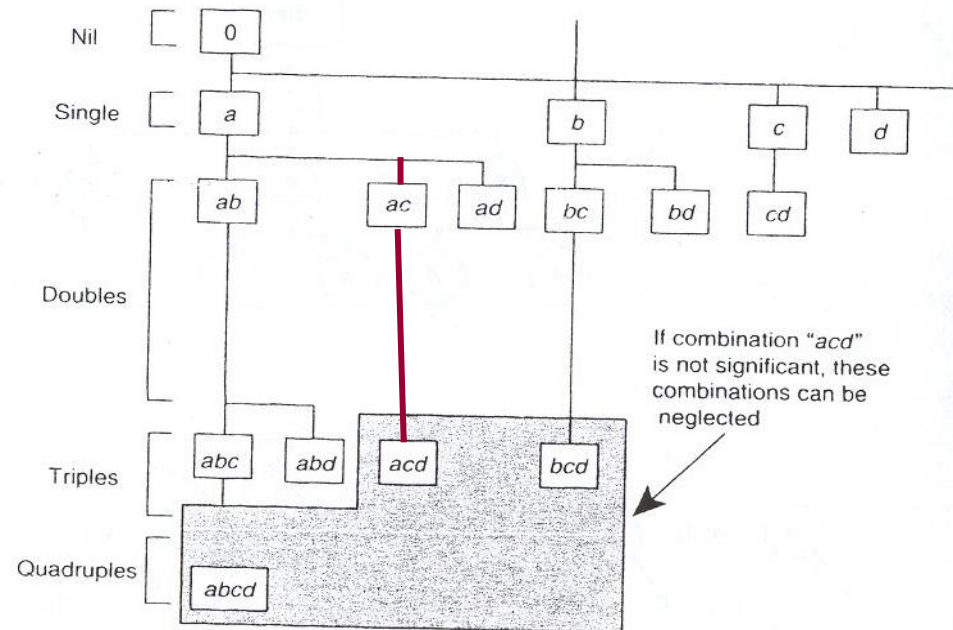
Minimikatkosjoukkojen laskenta yhteisvikojen analyysi, koherentit järjestelmät

Jan-Erik Holmberg
Systeemianalyysin laboratorio
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
PL 11100, 00076 Aalto
jan-erik.holmberg@aalto.fi

Katkosjoukkojen lukumäärä (1/4)

- Lähtökohtia
 - Isoissa järjestelmissä perustapahtumia voi olla satoja
 - Näistä muodostuvia katkosjoukkoja voi olla miljoonia tai peräti miljardeja \Rightarrow tuloksena laskennallisia haasteita
 - Päähuomio kohdistuu yleensä t_n :ltään suurimpiin katkosjoukkoihin (esim. $t_n > 10^{-7}$)
 - Miten tarkasteltavien katkosjoukkojen määrää voidaan rajoittaa siten, että t_n :ltään kynnyksarvon alittavia katkosjoukkoja ei välttämättä generoida?
- Lähestymistapa
 - Järjestetään perustapahtumat t_n :nsä mukaan alenevaan järjestykseen
 - Rakennetaan puu, jossa
 - » kullakin tasolla lisätään yksi vikaantuva perustapahtuma aiempien tasojen tapahtumiin
 - » kullakin rivillä perustapahtumat esitetään em. t_n -järjestyksen mukaisesti (so. t_n :ltään suurin ensin, sitten toiseksi suurin jne.)

Katkosjoukkojen lukumäärä (2/4)



- Huomioita
 - Olkoon P_i i :nnen perustapahtuman tn
 - Vikajoukko FS (failure set) on joukko toteutuvia perustapahtumia
 - Jos perustapahtumat ovat riippumattomia, niin vikajoukon tn on

$$P(FS) = \prod_{i \in FS} P_i \prod_{i \notin FS} (1 - P_i)$$

Katkosjoukkojen lukumäärä (3/4)

- Tapahtuman lisääminen vikajoukkoon
 - Jos FS' on vikajoukko, joka saadaan lisäämällä vikajoukkoon FS perustapahtuma j , niin

$$\begin{aligned} P(FS') &= \frac{P_j}{1 - P_j} \prod_{i \in FS} P_i \prod_{i \notin FS} (1 - P_i) \\ &= P(FS) \times \frac{P_j}{1 - P_j} \end{aligned}$$

- Kerrointermi $\frac{P_j}{1 - P_j}$ pienempi kuin 1 joss $P_j < 0.5$
- Ts. jos FS :n tn on alle kynnyksarvon, sama pätee tn-ehdon mukaisesti laajennetulle vikajoukolle
⇒ vikajoukkojen määrää voidaan rajata

Katkosjoukkojen lukumäärä (4/4)

- Tapahtuman vaihtaminen toiseksi
 - Jos FS'' saadaan vaihtamalla vikajoukossa FS perustapahtuma j tapahtumaksi k , niin

$$\begin{aligned}
 P(FS'') &= P_k(1 - P_j) \prod_{i \in FS \cap FS''} P_i \prod_{i \notin FS \cap FS''} (1 - P_i) \\
 &= \frac{1 - P_j}{P_j} \times \frac{P_k}{1 - P_k} \times P(FS)
 \end{aligned}$$

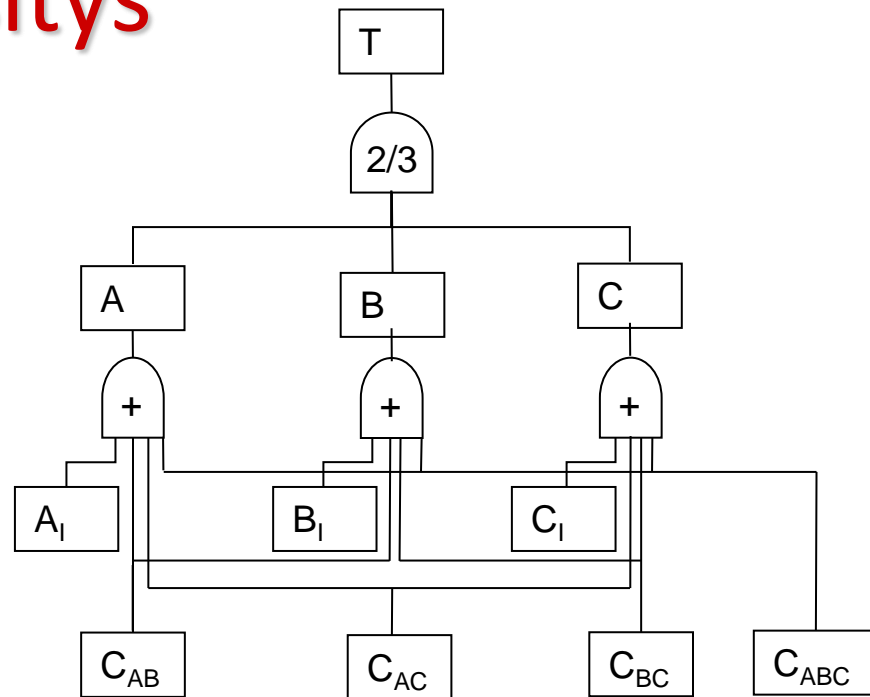
Huom! Modarres
(3.4) väärin!

- Kerrointermi pienempi kuin 1 joss $P_k < P_j$
- Ts. jos FS :n tn on alle kynnyksarvon, sama pätee näin tehdyn vaihdon kautta saadulle vikajoukolle
 \Rightarrow vikajoukkojen määrää voidaan rajata

Toisistaan riippuvat vikaantumiset

- Riippuvuuksien huomiointi
 - Perustapahtumien taustalla voi olla yhteisiä syitä
 - Nämä on pyrittävä huomioimaan – muutoin saadut riskiarviot ovat alakannttiin, koska yhteisten syiden vaikutukset eivät näy tuloksissa
 - Edellyttää tilastojen rakentamista ja käyttöä siten, että yhteiset vikaantumissyöt tunnistetaan
 - » Tämä voi olla käytännössä haasteellista
- Esimerkki
 - Järjestelmässä kolme komponenttia A, B ja C
 - Järjestelmä toimii, jos komponenteista vähintään kaksi toimii (so. 2/3-portti)
 - Komponentit voivat vikaantua toisistaan riippumatta
 - Lisäksi komponentit A, B ja C voivat vikaantua yhteisistä syistä joko pareittain tai kaikki kolme
 - Merkitään tapahtumia
 - » A = komponentti vikaantuu (vast. B, C)
 - » A_i = A vikaantuu mistään muista syistä riippumatta (vast. B_i, C_i)
 - » C_{AB} = komponentit A ja B vikaantuvat yhteisestä syystä, joka ei vikaannuta C:tä (vast. C_{AC}, C_{BC})
 - » C_{ABC} = kaikki kolme komponenttia vikaantuvat yhteisestä syystä

Vikapuuesitys



- A-komponentin vikaantuminen

$$A = A_I + C_{AB} + C_{AC} + C_{ABC}$$

- Vikaantumissyöt toisensa poissulkevia \Leftrightarrow

$$A_I \cdot C_{AB} = A_I \cdot C_{AC} = A_I \cdot C_{ABC} = \emptyset$$

$$C_{AB} \cdot C_{AC} = C_{AB} \cdot C_{ABC} = \emptyset$$

Vikaantumisen minimikatkosjoukot

- Vikaantuminen tapahtuu, kun

$$T = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

- Edellisen kalvon tulosten perusteella

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_I + C_{AB} + C_{AC} + C_{ABC}) \cdot (B_I + C_{AB} + C_{BC} + C_{ABC}) \\ &= A_I \cdot B_I + C_{AB} + C_{ABC} \end{aligned}$$

(muiden parien leikkaukset tyhjiä)

- Minimikatkosjoukoiksi saadaan siis

$$T = A_I \cdot B_I + A_I \cdot C_I + B_I \cdot C_I + C_{AB} + C_{AC} + C_{BC} + C_{ABC}$$

- Saadaan siis

$$P(T)$$

$$\begin{aligned} \approx & P(A_I) \cdot P(B_I) + P(A_I) \cdot P(C_I) + P(B_I) \cdot P(C_I) + P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{BC}) \\ & + P(C_{ABC}) \end{aligned}$$

- (riippumattomille tapahtumille $P(A_I \cdot B_I) = P(A_I) \cdot P(B_I)$, leikkauksen $A_I \cdot B_I \cdot C_I$ tn paljon pienempi kuin parien

Vikaantumistodennäköisyys

- Oletetaan, että
 - Kukin komponenteista vikaantuu muista syistä riippumatta samalla todennäköisyydellä Q_1
 - Pareittaiset samasta syystä aiheutuvat vikaantumiset tapahtuvat kukin t_n :llä Q_2
 - Kaikki kolme vikaantuvat yhteisestä syystä t_n :llä Q_3
 - Tällöin järjestelmä vikaantuu siis t_n :llä

$$P(T) \approx 3(Q_1)^2 + 3Q_2 + Q_3$$

- Jos esimerkiksi $Q_1 = 0.05$, $Q_2 = 0.02$, $Q_3 = 0.01$, niin

$$P(T) \approx 3 \times 0.05^2 + 3 \times 0.02 + 0.01 = 0.0075 + 0.06 + 0.01 = 0.0775$$

- Yhteisten riskitekijöiden osuus kokonaisriskistä siis

$$\frac{0.06 + 0.01}{0.0775} = 90.3\%$$

- Riippumattomien vikojen vaikutus on siis verraten vähäinen, koska näiden lausekkeissa tulotermejä

Riippuvuudet ja ehdolliset tn:t

- Lähtökohtia

- Viime luennolla perustapahtumat oletettiin riippumattomiksi (ks. pumppujärjestelmä)
- Jos perustapahtumilla yhteisiä vikaantumissyitä, niin yhden perustapahtuman tn kasvaa, jos toisen perustapahtuman tiedetään tapahtuneen
- Esim. jos perustapahtumia (A_I, B_I) on kaksi kuten edellä siten, että nämä voivat toteutua joko riippumatta (A_I, B_I) tai yhteisestä syystä C_{AB} , niin

$$P(A \cdot B|B) = \frac{P(A_I)P(B_I) + P(C_{AB})}{P(B_I) + P(C_{AB})}$$

- Merkitään

$$p_{AB} = P(A_I)P(B_I)$$

$$p_A = P(A_I)$$

$$x = P(C_{AB})$$

$$f(x) = \frac{p_{AB} + x}{p_B + x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{p_B + x} - \frac{p_{AB} + x}{(p_B + x)^2} = \frac{p_B - p_{AB}}{(p_B + x)^2} > 0$$

- Minimi saavutetaan kohdassa $x = P(C_{AB}) = 0$, mikä vastaa riippumattomuutta

β -faktorimalli

- Lähtökohtia
 - Järjestelmän komponentit tuplataan m -kertaiseksi
 - Yhteisen (common) vikaantumissyyn tapahtuessa kaikki komponentit vikaantuvat
 - β -parametri ilmaisee, miten suuressa osassa vikaantuminen aiheutuu yhteisestä syystä, ts.

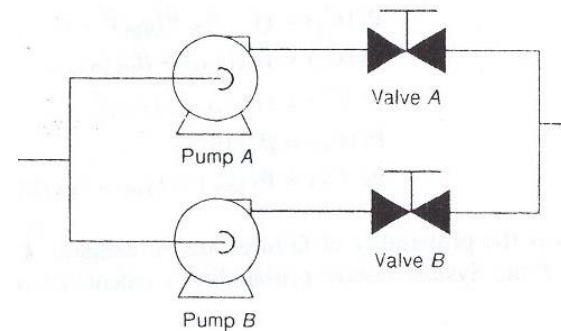
$$\beta = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_I}$$

missä λ_c on yhteisen syyn aiheuttama vikaantumistaajuus ja λ_I on riippumaton vikaantumistaajuus

- » Vastaavasti myös vikatodennäköisyyden kanssa
- Jos Q_t on järjestelmän kokonaisvikaantumistn, niin järjestelmä vikaantuu
 - » riippumattomien komponenttivikaantumisten tuloksena tn:llä $Q_1 = (1 - \beta)Q_t$
 - » yhteisestä syystä kaikkien komponenttien vikaantuessa tn:llä $Q_m = \beta Q_t$
 - » Tarkalleen k komponenttia ($1 < k < m$) ei voi vikaantua yhteisestä syystä, koska yhteinen syy vikaannuttaa kaikki komponentit
- ⇒ k valittua komponenttia ($1 < k < m$) vikaantuu todennäköisyydellä $Q_k = 0, k = 2, \dots, m - 1$

Esimerkki

- Jäähdytysjärjestelmä
 - Jäähdytys edellyttää sekä pumpun että venttiilin toimivan
 - Pumppu- ja venttiiliosasysteemikokonaisuudet tuplataan luotettavuuden parantamiseksi
 - Pumppu saattaa olla käynnistymättä (PS, pump failure to start) tai käydä liian vähän aikaa (PR, pump failure to run)
 - Venttiili saattaa olla avauhatta (VO, valve failure to open)

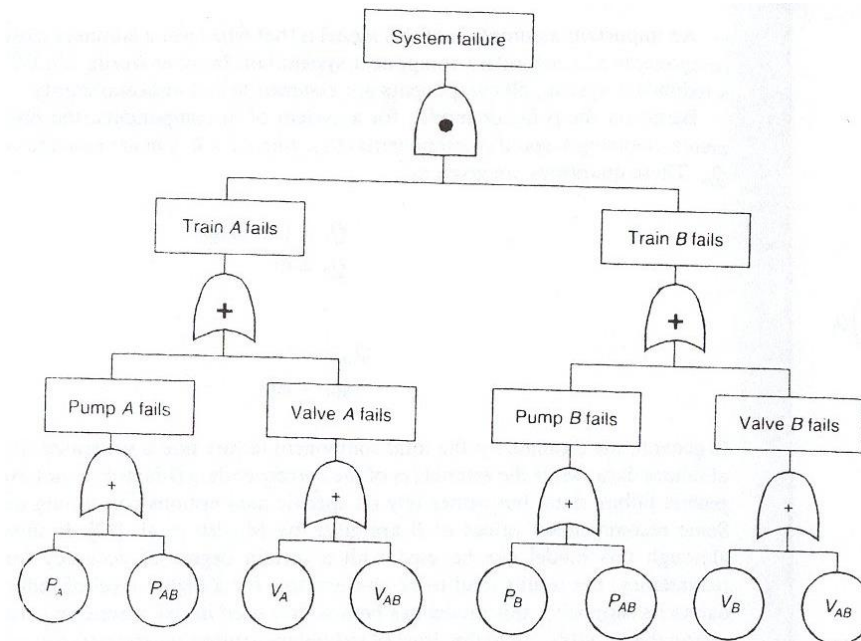
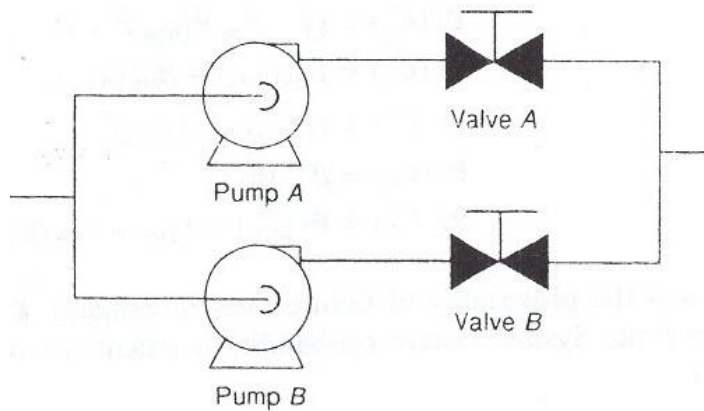


- Käynnissä olevan pumpun vikaantumistaajuus λ_{PR}
- Jos pumppu käy ajan T , niin se vikaantuu tänä aikana todennäköisyydellä

$$q_{PR} = \int_0^T \lambda_{PR} e^{-\lambda_{PR}t} dt = 1 - e^{-\lambda_{PR}T} \approx \lambda_{PR}T$$

Jäähdytysjärjestelmän vikapuu

- Rakennetaan vikapuu



- Minimikatkosjoukoiksi saadaan

$$C_1 = P_A \cdot P_B, C_2 = P_{AB}, C_3 = V_A \cdot V_B$$

$$C_4 = V_{AB}, C_5 = P_A \cdot V_B, C_6 = P_B \cdot V_A$$

Vikaantumistn:n laskenta (1/3)

- Arvioidaan yhteisistä syistä aiheutuvat vikaantumistaajuudet β -faktorimallilla
 - β_{PS} = miten suuressa osassa tapauksista pumppu jää käynnistymättä yhteisestä syystä
 - β_{PR} = miten suuressa osassa pumppu ei käy tavoiteaikaa T yhteisestä syystä
 - β_{VO} = miten suuressa osassa venttiili ei avaudu yhteisestä syystä
- Minimikatkosjoukkojen tn:t

$$P(P_A \cdot P_B) = [(1 - \beta_{PS})q_{PS} + (1 - \beta_{PR})q_{PR}]^2$$

$$P(P_{AB}) = \beta_{PS}q_{PS} + \beta_{PR}q_{PR}$$

$$P(V_A \cdot V_B) = [(1 - \beta_{VO})q_{VO}]^2$$

$$P(V_{AB}) = \beta_{VO}q_{VO}$$

$$P(P_A \cdot V_B) = P(P_B \cdot V_A)[(1 - \beta_{VO})q_{VO}] \times [(1 - \beta_{PS})q_{PS} + (1 - \beta_{PR})q_{PR}]$$

Vikaantumistn:n laskenta (2/3)

- Järjestelmän (System) vikaantumistn:n approksimoida ylhäältä summalla

$$P(S) \approx \sum_{i=1}^6 P(C_i)$$

- Huom! osa katkosjoukoista (esim. $P_A \cdot P_B, V_{AB}$) osin päällekkäisiä, kyse siis approksimaatiosta ylhäältä
- Tarkastellaan parametrien arvoja
 - $q_{PS} = 0.02, q_{VO} = 0.01$
 - $\lambda_{PR} = 0.05/\text{h}, T = 1 \text{ h} \Rightarrow q_{PR} = 1 - \exp(-0.05) = 0.0487$
 - $\beta_{PS} = \beta_{PR} = \beta_{VO} = 0.1$
- Katkosjoukkojen todennäköisyydet
 - $P(P_A \cdot P_B) = [0.9 \times 0.02 + 0.9 \times 0.0487]^2 = 0.003831$
 - $P(P_{AB}) = 0.1 \times 0.02 + 0.1 \times 0.0487 = 0.006877$
 - $P(V_A \cdot V_B) = [0.9 \times 0.01]^2 = 0.000081$
 - $P(V_{AB}) = 0.1 \times 0.01 = 0.001$
 - $P(P_A \cdot V_B) = P(P_B \cdot V_A) = [0.99 \times 0.01] \times [0.9 \times 0.02 + 0.9 \times 0.0487] = 0.000613$

Vikaantumistn:n laskenta (3/3)

- Vikaantumistodennäköisyys siis

$$P(S) \approx \sum_{i=1}^6 P(C_i) = 0,013014$$

- Yhteisten syiden (P_{AB}, V_{AB}) osuus kokonaisriskistä

$$\frac{P(P_{AB})}{P(S)} = \frac{0.006877}{0.013014} = 52.8\%$$

$$\frac{P(V_{AB})}{P(S)} = \frac{0.001}{0.013014} = 7.7\%$$

- Yhteisten syiden merkitys siis iso, vaikka β -parametrit verraten pieniä tasolla 0.1

- Huomioita

- Yhden pumppu-venttiililinjan luotettavuus

$$P(S_1) = q_{PS} + q_{PR} + q_{VO} = 0.0787$$

- Jos voitaisiin tuplata ilman yhteisiä vikaantumisia (so. β -parametrit nolliä), niin vikaantumistn olisi

$$P(S_1)^2 \approx 0.006194$$

- Ts. yhteiset vikasytyt alentavat luotettavuutta paljon!

Huom! Tässä esimerkissä laskettiin tulokset monen desimaalin tarkkuudella, mutta käytännössä parin desimaalin tarkkuus riittävä

Yhteisvikaantumisen estimointi

- β -faktorimallin kritiikki
 - Oletus siitä, että yhteinen vika aiheuttaa aina kaikkien komponenttien vikaantumisen on kovin vahva
 - » Esim. kolmen komponentin 2/N-järjestelmässä (ks. luennon alku) yhteiset syyt voisivat vikaannuttaa joko kaksi (esim. C_{AB}) tai kolme komponenttia (C_{ABC})
 - Yhteistodennäköisyydet estimoitavissa eri tavoin
 - » β -faktorimallissa kysytään, miten suurella tn:llä joku muu komponentti myös vikaantunut yhteisestä syystä, jos yhden komponentin tiedetään vikaantuneen
 - » Jos komponentteja kaksi (A ja B) s.e. yhteisen vikaantumisen on tapahtuma C_{AB} , niin
$$\beta = \frac{P(C_{AB})}{P(B_1) + P(C_{AB})}$$
- Multiple Greek Letter (MGL)-malli
 - Yleistää β -faktorimallin siten, että yhteinen syy ei vikaannuta välttämättä kaikkia komponentteja
 - Kysymykset
 - » β -faktori: millä tn:llä ainakin yksi toinen komponentti vikaantuu yhteisestä syystä, jos ko. komponentti vikaantunut?
 - » γ -faktori: millä tn:llä ainakin kaksi muuta komponenttia vikaantuu yhteisestä syystä, jos ko. komponentti on vikaantunut yhteisestä syystä vähintään yhden toisen komponentin kanssa?

MGL-mallin estimointi (1/2)

- Alun esimerkin β ja γ -parametrit

$$\beta = \frac{P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{ABC})}{P(A_1) + P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{ABC})}$$

$$\gamma = \frac{P(C_{ABC})}{P(C_{AB}) + P(C_{AC}) + P(C_{ABC})}$$

- Komponenttien riippumattomat (Q_1) ja pareittaiset (Q_2) vikaantumistn:t oletettiin samoiksi \Leftrightarrow

$$\beta = \frac{2Q_2 + Q_3}{Q_1 + 2Q_2 + Q_3} = \frac{2 \times 0.02 + 0.01}{0.05 + 2 \times 0.02 + 0.01} = 33\%$$

$$\gamma = \frac{Q_3}{2Q_2 + Q_3} = 20\%$$

- Tarkasteluissa ei kuitenkaan edetä näin päin, vaan niissä β - ja γ -parametreista johdetaan pareittaisten, kolmittaisten jne. yhteisten syiden aiheuttamien vikaantumisten Q_2, Q_3, Q_4, \dots tn:t
- m :n komponentin järjestelmässä yhden komponentin kokonaisvikaantumistn Q_t (total) muodostuu siitä, että komponentti vikaantuu joko riippumatta tai kahden, kolmen jne. komponentin vikaantumisen aiheuttamasta yhteisestä syystä
- Yhdelle komponentille saadaan siis summa

$$Q_t = \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} Q_k$$

MGL-mallin estimointi (2/2)

- Saadaan Q_k -parametrien yhtälöt

$$\begin{cases} \beta = \frac{2Q_2 + Q_3}{Q_1 + 2Q_2 + Q_3} \\ \gamma = \frac{Q_3}{2Q_2 + Q_3} \\ Q_t = Q_1 + 2Q_2 + Q_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = (1 - \beta)Q_t \\ Q_2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\beta Q_t \\ Q_3 = \gamma\beta Q_t \end{cases}$$

- Ts. Q_k -parametrit esitettävissä β - ja γ -parametrien algebrallisina lausekkeina
- Parametrit estimoidaan tarkastelemalla, miten usein useammat komponentin vikaantuvat yhteisyyistä
 - » Esim. γ -parametri saadaan jakamalla vähintään kolmen komponentin yhteisvikaantumisten lkm vähintään kahden komponentin yhteisvikaantumisten lkm:llä

- Yleinen tapaus

- Merkitään $\rho_1 = 1, \rho_2 = \beta, \rho_3 = \gamma, \dots, \rho_{m+1} = 0$
- Tällöin pätee

$$Q_k = \binom{m-1}{k-1}^{-1} (1 - \rho_{k+1}) \left(\prod_{i=1}^k \rho_i \right) Q_t$$

Huom!
 Modarres
 s. 78 virhe

Luotettavuus - määritelmä

- Tarkasteltavan yksikön luotettavuus
 - On se todennäköisyys, että yksikkö suorittaa tarkoitetulla tavalla sille kuuluvat tehtävät tarkasteltavana ajanjaksona täsmennettyjen ympäristöolosuhteiden vallitessa
- Huomioita
 - Tarkasteltava yksikkö riippuu tilanteesta
 - » Toisinaan kyse komponentista, toisinaan koko järjestelmästä – vrt. vikapuut ja tapahtumapuut
 - Tarkoitettu suorittaminen kuvattava yksiselitteisesti
 - » Tarpeen esimerkiksi vahingonkorvausvaatimusten ja viranomaisvaatimusten tulkitsemiseksi
⇒ sopimus-juridiikka ja säädökset (direktiivit jne.)
 - » Toleranssirajat yleisiä – esim. vaa’an tarkkuuden oltava 0 ± 0.001 kg
 - Tarkoitettu yksikkö ja tehtävä kuvattava myös
 - » Esim. auton hands free’n hajoaminen ei estä kuljetus-tehtävän suorittamista, mutta työpuhelut jäävät soittamatta
 - Ajanjakson ohella voidaan käyttää muitakin suureita
 - » Esim. ajokilometrit, virtakytkimen kytkemiskerrat
 - Olosuhteet rajattava myös
 - » Esim. vuoristorajoitukset autonvuokraajalle Islannissa
 - Laatu vs. luotettavuus
 - » Laatu staattinen käsite – viittaa ominaisuuksiin jonakin hetkenä, luotettavuus huomioi ajan ja olosuhteet
 - » Luotettavuus implikoi laadun, ei välttämättä toisin päin

Koherentit järjestelmät (1/4)

- Komponentin $x_i, i = 1, \dots, n$ tila

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{jos komponentti ei toimi} \\ 1, & \text{jos komponentti toimii} \end{cases}$$

- n :stä komponentista koostuvan järjestelmän tilavektori on $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$

- Järjestelmän rakennefunktio

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{jos järjestelmä ei toimi tilavektorilla } \mathbf{x} \\ 1, & \text{jos järjestelmä toimii tilavektorilla } \mathbf{x} \end{cases}$$

- Huom! sama muuttujien loogisten arvojen tulkinta kuin logiikkakaavioissa, sen sijaan vikapuissa 1 tarkoitti vian esiintymistä!

Koherentit järjestelmät (2/4)

- Sarjajärjestelmä – komponentit peräkkäin
 - Kaikkien toimittava, jotta ”virta menisi läpi”

$$\phi(\mathbf{x}) = \min\{x_1, \dots, x_n\} = \prod_{i=1}^n x_i$$

- Rinnakkaisjärjestelmä – komponentit rinnan
 - Yhdenkin toimiminen riittää

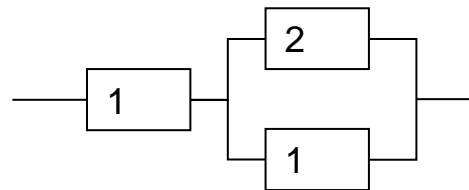
$$\phi(\mathbf{x}) = \max\{x_1, \dots, x_n\} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

- k/n-järjestelmä

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \sum_{i=1}^n x_i < k \\ 1, & \sum_{i=1}^n x_i \geq k \end{cases}$$

Koherentit järjestelmät (3/4)

- Komponentti on irrelevantti, jos sillä ei ole vaikutusta rakennefunktiioon
 - Esim. komponentti 2 on alla olevassa järjestelmässä irrelevantti



$$\phi(\mathbf{x}) = x_1 [1 - (1 - x_1)(1 - x_2)]$$

Koherentit järjestelmät (4/4)

- Järjestelmä on koherentti joss siinä ei ole irrelevantteja komponentteja ja

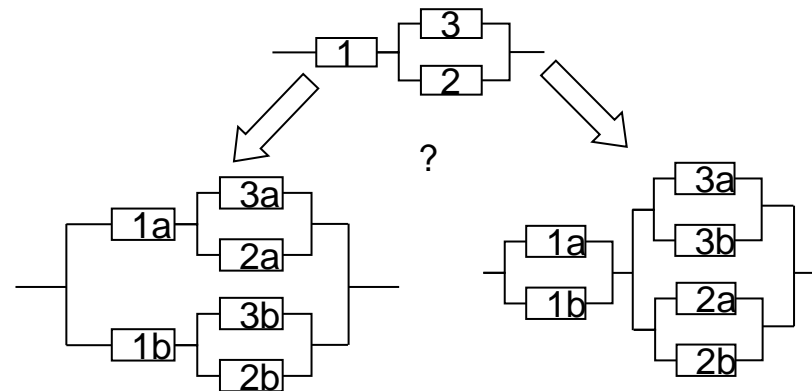
$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

- Ts. rakennefunktio on jokaisen komponentin osalta ei-vähenevä
- Yksittäisen komponentin muuttaminen viallisesta toimivaksi voi tehdä järjestelmän toimivaksi, mutta ei toisin päin
- Yleensä pyritään rakentamaan koherentteja järjestelmiä, koska näissä komponentteja voidaan korjata ilman, että tämä voi aiheuttaa vikoja
- Kaikki järjestelmät eivät ole koherentteja: esimerkiksi yksikomponenttinen rakennefunktio on ei-koherentti

$$\phi(x_1) = 1 - x_1$$

Komponenttien kahdentaminen (1/4)

- Luotettavuutta voidaan parantaa kahdentamalla joko koko järjestelmä tai sen osat – mutta kumpi on parempi?



Komponenttien kahdentaminen (2/4)

- Lause. Jos järjestelmä on koherentti ja \mathbf{x} ja \mathbf{y} ovat tilavektoreita, niin

$$\phi(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \dots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)) \geq 1 - [1 - \phi(\mathbf{x})][1 - \phi(\mathbf{y})].$$

Epäyhtälö pätee yhtäsuuruutena, kun

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$$

- Ts. kannattaa kahdentaa komponentteja, ei järjestelmiä!

Komponenttien kahdentaminen (3/4)

- Todistus

Kaikille $i = 1, \dots, n$ pätee

$$1 - (1 - x_i)(1 - y_i) \geq x_i$$

Järjestelmä on koherentti, joten rakennefunktio on argumenttiensa suhteen ei-vähenevä ja

$$\phi(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \dots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)) \geq \phi(\mathbf{x})$$

Vastaavasti pätee

$$\phi(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \dots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)) \geq \phi(\mathbf{y})$$

Saadaan siis

$$\begin{aligned} & \phi(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \dots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)) \\ & \geq \max\{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} = 1 - [1 - \phi(\mathbf{x})][1 - \phi(\mathbf{y})] \end{aligned}$$

Komponenttien kahdentaminen (4/4)

Rakennefunktiolle pätee

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} & \phi(1 - (1 - x_1)(1 - y_1), \dots, 1 - (1 - x_n)(1 - y_n)) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)(1 - y_i) \end{aligned}$$

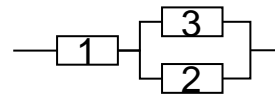
Tämä vastaa rinnakkaisjärjestelmää, jossa kahdentamistavalla ei siis väliä

$$1 - [1 - \phi(\mathbf{x})][1 - \phi(\mathbf{y})] = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)(1 - y_i)$$

Rakenteellinen tärkeys (1/3)

- Komponentin merkitys luotettavuuden kannalta riippuu sen sijainnista

- Esim. järjestelmässä komponentti 1 näyttää



tärkeämmältä, koska sen hajoaminen väistämättä vikaannuttaa koko järjestelmän; näin ei ole komponenttien 2 ja 3 osalta

- Komponentti 1 on toimivana kolmessa tilavektorissa $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$
- Järjestelmä toimii näistä kolmessa
- Jos x tilavektori, niin $(1_i, x_{-i})$ on tilavektori, jossa komponentti i on toimii ja muut komponentit saavat samat arvot kuin mitä niillä on tilavektorissa x
- Vastaavasti $(0_i, x_{-i})$ on tilavektori, jossa komponentti i ei toimi, mutta muut saavat tilavektorin x mukaiset arvot

Rakenteellinen tärkeys (2/3)

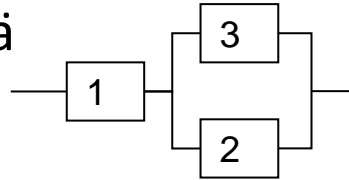
- Määritelmä. Komponentin i rakenteellinen tärkeys koherentissa järjestelmässä on

$$I_{\phi}(i) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\{x|x_i=1\}} [\phi(1_i, x_{-i}) - \phi(0_i, x_{-i})]$$

- Tämä on suhteellinen osuus niistä muiden komponenttien tiloista, joissa komponentin vikaantuminen vikaannuttaa koko järjestelmän
- Myös todennäköisyys, jos muut komponentit vikaantuvat riippumattomasti yhtä isolla t_n :llä

Rakenteellinen tärkeys (3/3)

- Esimerkkijärjestelmä



- Komponentti 1 toimivana mukana tilavektoreissa $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$
 Järjestelmä toimii näistä kolmessa ensimmäisessä
- Komponentin 1 vikaantumisen johtaa tilavektoreihin $(0,1,1)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,0,0)$
 Järjestelmä ei toimi näistä missään

$$I_{\phi}(1) = \frac{1}{2^{3-1}} (1 + 1 + 1 + 0) = \frac{3}{4}$$

- Vastaavasti komponentille 3 saadaan tilavektorit
 $(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)$ (kaksi toimii)
 $(1,1,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,0)$ (yksi toimii)

$$I_{\phi}(1) = \frac{1}{2^{3-1}} (0 + 1 + 0 + 0) = \frac{1}{4}$$

- Symmetriasyyistä komponentin 2 rakenteellinen tärkeys sama kuin komponentin 3

Rakennefunktio ja toimintapolut (1/2)

- Olkoot P_1, \dots, P_s koherentin järjestelmän minimitoimintapolut ja

$$\alpha_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{jos kaikki } P_j\text{:n komponentit toimivat} \\ 0, & \text{jos jokin } P_j\text{:n komponentti ei toimi} \end{cases}$$

Pätee

$$\alpha_j(\mathbf{x}) = \min_{i \in P_j} x_i = \prod_{i \in P_j} x_i$$

Järjestelmä toimii, jos jonkin toimintapolun komponentit toimivat

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \alpha_j(\mathbf{x})=1 \text{ jollekin toimintapolulle} \\ 0, & \text{jos } \alpha_j(\mathbf{x})=0 \text{ kaikille toimintapoluille} \end{cases}$$

Rakennefunktio ja toimintapolut (2/2)

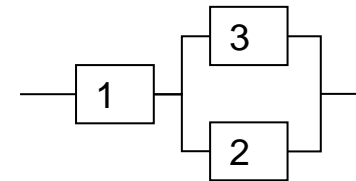
- Saadaan siis

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_j \alpha_j(\mathbf{x}) = \max_j \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^s \left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i \right)$$

- Rakennefunktio on siis yksikäsitteisesti esitettävissä minimitoimintapolkujen rinnakkaisjärjestelmänä

- Esimerkki

- minimitoimintapolut $(1,1,0)$, $(1,0,1)$



$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3$$

Rakennefunktio ja katkosjoukot (1/2)

- Olkoot C_1, \dots, C_k koherentin järjestelmän minimikatkosjoukot ja

$$\beta_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{jos ainakin yksi komponentti } C_j\text{:ssä toimii} \\ 0, & \text{jos mikään komponentti } C_j\text{:ssä ei toimi} \end{cases}$$

- Pätee

$$\beta_j(\mathbf{x}) = \max_{i \in C_j} x_i = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)$$

- Järjestelmä ei toimi, jos jonkin minimikatkosjoukon kaikki komponentit pettävät

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{jos } \beta_j(\mathbf{x})=1 \text{ kaikille katkosjoukoille} \\ 0, & \text{jos } \beta_j(\mathbf{x})=0 \text{ jollekin katkosjoukoille} \end{cases}$$

Rakennefunktio ja katkosjoukot (2/2)

- Tällöin

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_j \beta_j(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \beta_j(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i) \right)$$

- Rakennefunktio siis yksikäsitteisesti esitettävissä minimikatkosjoukkojen sarjajärjestelmänä
- Esimerkki

- minimikatkosjoukot $(1,0,0,)$, $(0,1,1)$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= [1 - (1 - x_1)][1 - (1 - x_2)(1 - x_3)] \\ &= x_1[x_2 + x_3 - x_2x_3] \\ &= x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

