M1

(a) $x = \cos t \quad y = \sin t \quad ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $x = \sin t^2 \quad y = \cos t^2 \quad ; \quad 0 \leq \quad \leq (2\pi)^{1/2}$

(c) $\begin{cases} x = \cos(\pi u + 1) \\ y = \sin(\pi u + 1) \end{cases} \quad ; \quad u \in [-1, 1]$

(d) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t\sqrt{2 - t^2} \end{cases} \quad ; \quad t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

M2 $\quad x = t^3 + t$

$y = 1 - t^3$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -3t^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{-3t^2}{3t^2 + 1}\right|_{t=1} = -\frac{3}{4}$$

Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Malliratkaisut, Viikko 2, 2020

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Piirrä käyrä

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2+1}{4(1-t)}\,\mathbf{i} + \frac{t}{t+1}\,\mathbf{j}$$

ja määritä sen (suoraviivaiset) asymptootit sekä pisteet, joissa tangentti on vaaka- tai pystysuora.

Ratkaisu: Asymptootit $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$;
pystysuora tangentti pisteissä $(\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1), -1/\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1), 1/\sqrt{2})$.

RATKAISU Suoraviivaiset asymptootit ovat suoria, joita käyrä $\mathbf{r}$ lähestyy, kun $\|\mathbf{r}(t)\| \to \infty$. Koska koordinaattifunktiot

$$x(t) = \frac{t^2+1}{4(1-t)} \quad \text{ja} \quad y(t) = \frac{t}{t+1}$$

ovat rationaalifunktioita, voidaan rajoittaa tarkastelu parametrin t arvoihin, joilla ainakin toisen koordinaattifunktion ~~nimittäjä~~ osoittaja kasvaa rajatta tai ~~osoittaja~~ nimittäjä lähestyy nollaa.

- Havaitaan, että $\lim_{t\to 1^+} x(t) = -\infty$ ja $\lim_{t\to 1^-} x(t) = \infty$. Toisaalta

$$\lim_{t\to 1} y(t) = \lim_{t\to 1} \frac{t}{t+1} = \frac{1}{2}.$$

  Näin ollen yksi käyrän asymptooteista on $y = 1/2$.

- Vastaavasti havaitaan, että $\lim_{t\to -1^+} y(t) = \infty$, $\lim_{t\to -1^-} y(t) = -\infty$ ja

$$\lim_{t\to -1} x(t) = \lim_{t\to -1} \frac{t^2+1}{4(1-t)} = \frac{1}{4}.$$

  Siten käyrällä on myös asymptootti $x = 1/4$.

- Lisäksi $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$ ja $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \infty$. Toisaalta

  $$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{1+1/t} = 1,$$

  joten myös suora $y = 1$ on käyrän asymptootti.

Käyrällä on pystysuora tangentti ainoastaan pisteissä, joissa $x'(t) = 0$ ja $y'(t) \neq 0$. Ratkaistaan tangenttivektorin x-komponentin nollakohdat:

$$\begin{aligned} x'(t) = \frac{-t^2+2t+1}{4(1-t)^2} = 0 &\Leftrightarrow -t^2+2t+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t = 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Toisaalta y-komponentin derivaatta

$$y'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} \neq 0$$

kaikilla parametrin t arvoilla. Näin ollen käyrällä on pystysuorat tangentit pisteissä

$$\mathbf{r}(1+\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

ja

$$\mathbf{r}(1-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

Vastaavasti vaakasuoran tangentin olemassaolo edellyttäisi, että $y'(t) = 0$. Kuitenkin jo edellä havaittiin, ettei tämä toteudu millään parametrin t arvoista. Tästä seuraa, ettei käyrällä voi olla vaakasuoria tangentteja.

Piirto esim. Maple:

```
plot([(t^2+1)/(4(1-t)), t/(t+1), t = -infinity..infinity])
```

TEHTÄVÄ J2

a) Laske pituus ruuviviivankaarelle $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) Johda ellipsin kehän pituudelle lauseke

$$a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt,$$

missä a on ellipsin ison akselin puolikas ja e eksentrisyys. Integraalia ei voida laskea alkeisfunktioiden avulla.

Ratkaisu: a) $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

RATKAISU

a) Tangenttivektoriksi saadaan

$$\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}$$

ja tälle normi

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}\\ &= \sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Kaarenpituus on siten

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

b) Ellipsillä, jonka polttopisteet ovat x-akselilla, on parametrisointi

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\sin t\,\mathbf{j},\ \text{kun } t \in [0, 2\pi],^{1}$$

Lisäksi ellipsin eksentrisyydelle pätee[2]

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \geq 0 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2.$$

[1] Tässä a on puolet ellipsin isoakselin pituudesta ja b puolet pikkuakselin pituudesta.

[2] Voi toki halutessaan myös johtaa: Eksentrisyys määritellään ellipsin polttopisteiden välisen etäisyyden suhteena isoakselin pituuteen.

Ratkaistaan ensin tangenttivektorin normi:

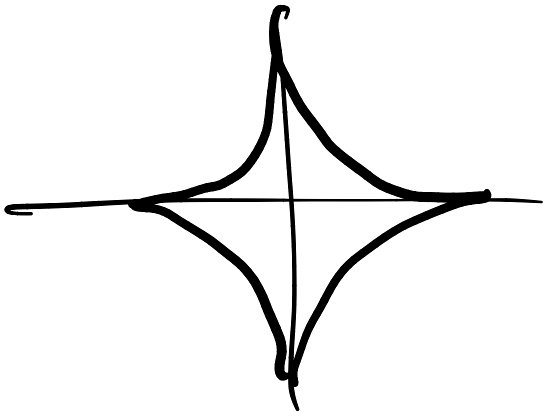
$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}'(t) &= -a\sin t\,\mathbf{i} + b\cos t\,\mathbf{j} \\
\Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin 2t + b^2\cos^2 t} \\
&= a\sqrt{\sin^2 t + (b^2/a^2)\cos^2 t} \\
&= a\sqrt{\sin^2 t + (1-e^2)\cos^2 t} \\
&= a\sqrt{1-e^2\cos^2 t}.
\end{aligned}
$$

Siten ellipsin kaarenpituus on

$$
\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} a\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt
$$

K1

Asteroidi :



$$x(t) = a\cos^3 t$$
$$y(t) = a\sin^3 t$$

Symmetria: $\displaystyle 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = I_s$

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t$$
$$y'(t) = 3a\cos t \sin^2 t$$

$$I_s = 4 \cdot 3 \cdot a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t}\, dt$$

$$= 12a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \, dt = 12a \Big/_0^{\pi/2} -\frac{1}{2}\cos^2 t$$

$$= 6a$$

K2 (a)

$$\text{Kaarenpituus} = \int_1^T \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| dt = I_s$$

$$\underline{r}(t) = at^2\,\underline{i} + bt\,\underline{j} + c\ln t\,\underline{k}, \quad 1 \le t \le T$$

$$I_s = \int_1^T \sqrt{4a^2t^2 + b^2 + \frac{c^2}{t^2}}\, dt$$

$$b^2 = 4ac \Rightarrow I_s = \int_1^T \sqrt{\left(2at + \frac{c}{t}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_1^T \left(2at + \frac{c}{t}\right) dt \quad (\text{aina positiivinen})$$

$$= a(T^2 - 1) + c\ln T$$

K2 (b)

$$x(t) = a\cos t \sin t$$
$$y(t) = a\sin^2 t$$
$$z(t) = bt$$

Huijataan: $x(t) = \frac{a}{2}\sin 2t$

$$y(t) = \frac{a}{2}(1-\cos 2t)$$

eli kierrejousi (helix) sylinterin

$x^2 + (y-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ pinnalla!

Pituus: $I_s = \int_0^T \sqrt{a^2\cos^2 2t + a^2 \sin^2 2t + b^2}\,dt$

$$= T\sqrt{a^2+b^2}$$

Haaste

Hiukkanen liikkuu pitkin ellipsiä

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

parametrisoituna muodossa $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.
a) Määritä hiukkasen nopeus ja kiihtyvyys parametrin arvolla $t = \pi/4$.
b) Määritä kiihtyvyyden tangentti- ja normaalikomponentit parametrin arvolla $t = \pi/4$.
(Vast: $\mathbf{a}_N = -(6\sqrt{2}/13)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$)

RATKAISU

a) Nopeus:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} = -3\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j})$$

Kiihtyvyys:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -3\cos t\,\mathbf{i} - 2\sin t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

b) Kiihtyvyyden tangenttikomponentti eli hiukkasen nopeuden suuntainen osa saadaan pistetulolla

$$\mathbf{a}_T = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Sijoitetaan a-kohdassa lasketut arvot:

$$\begin{aligned} a_T &= \left(\frac{9}{2} - 2\right)\frac{\sqrt{2}}{2}(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) : \left(\frac{9}{2} + 2\right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{26}(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Normaali- ja tangenttikomponenteille pätee $\mathbf{a}_N + \mathbf{a}_T = \mathbf{a}$, joten

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_N = \mathbf{a} - \mathbf{a}_T &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-1 + \frac{5}{13}\right)\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\left(-1 - \frac{5}{13}\right)\mathbf{j} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{26}(24\,\mathbf{i} + 36\,\mathbf{j}) = -\frac{6\sqrt{2}}{13}(2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}). \end{aligned}$$