Viikko 3 : Alkuviikko

M1 & M2 :
$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)(x+y)}$$

$f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ suoran $x = y$ ulkopuolella.

Siispä rajankäynti onnistuu $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \frac{1}{2}$

(Huom! $f(x,y)$ on määritelty <u>kaikissa</u> $(1,1)$:n ympäristöissä. Suoran $x = y$ "välttäminen" pois ei vaikuta.)

Jatkuvuus ko. pisteessä siis saavutetaan.

Lisäksi asettamalla $f(x,y) = \dfrac{1}{2x}$, kun $x = y$ (paitsi origossa) f on jatkuva.

Funktiota ei voi saattaa jatkuvaksi suoralla $y = -x$:

$$|f(x,y)| = \frac{1}{|x+y|} \longrightarrow \infty, \text{ kun } y \to -x.$$

Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Malliratkaisut, Viikko 3, 2020

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Todista, että seuraavilla kahden reaalimuuttujan reaaliarvoisilla funktioilla on raja-arvo origossa ja määritä tämä:

$$\text{a)}\ \frac{(1+y^2)\sin x}{x}, \qquad \text{b)}\ \frac{x\tan y}{y}.$$

Ratkaisu: a) 1; b) 0.

RATKAISU Kumpikin tehtävässä annetuista funktioista on muotoa $f(x,y) = g(x)h(y)$, joten voimme käyttää hyödyksi tietoa:
Jos $\lim_{x\to 0} g(x) = a$ ja $\lim_{y\to 0} h(y) = b$, niin $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = ab$.

a) Valitaan

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{ja} \quad h(y) = 1 + y^2,$$

jolloin

$$g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ja

$$h(y) = \lim_{y\to 0}(1+y^2) = 1.$$

Näin ollen myös tulon raja-arvo on olemassa ja se on

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+y^2)\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} g(x) \lim_{y\to 0} h(y) = 1\cdot 1 = 1.$$

b) Vastaavasti valitaan

$$g(x) = x \quad \textbf{ja} \quad h(y) = \frac{\tan y}{y}.$$

Tällöin

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

ja

$$\lim_{y\to 0} h(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y}\right) = 1.$$

Siten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \tan y}{y} = \lim_{x\to 0} g(x) \lim_{y\to 0} h(y) = 0 \cdot 1 = 0.$$

TEHTÄVÄ J2 Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $f(0,0) = a$ ja origon ulkopuolella funktiolla on lauseke

$$\text{a)}\ \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \qquad \text{b)}\ \frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2}.$$

Voidaanko a valita siten, että f on jatkuva origossa?

Ratkaisu: a) Ei voida; b) $a = 0$.

RATKAISU

a) Tämä funktio on esimerkki tapauksesta, jossa funktiolla ei välttämättä ole tarkastelupisteessä raja-arvoa, vaikka jokaista *suoraa* pitkin lähestyttäessä raja-arvo olisikin sama. Nimittäin, jos origoa lähestytään pitkin suoraa (t, kt) saadaan

$$f(t,kt) = \frac{t^2 \cdot kt}{t^4 + (kt)^2} = \frac{kt^3}{t^2(t^2+k^2)} = \frac{kt}{t^2+k^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} f(t,kt) = 0, \text{ kaikilla } k \in \mathbb{R}.$$

Toisaalta, jos origoa lähestytään pitkin paraabelinkaarta (t, kt^2), niin

$$f(t,kt) = \frac{t^2 \cdot kt^2}{t^4 + (kt^2)^2} = \frac{kt^4}{t^4(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

$$\Rightarrow_{t\to 0} f(t,kt) = \frac{k}{1+k^2},$$

eli raja-arvo riippuu tällöin paraabelin valinnasta. Näin ollen funktiolla ei ole raja-arvoa origossa, eikä lukua a voida valita s.e. funktiosta saataisiin jatkuva.

b) Osoitetaan, että funktion raja-arvo origossa on nolla. Havaitaan, että

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2}-0\right| &= \left|\frac{x^4y+xy^2}{x^4+y^2}\right| \\
&= \frac{|x^4y+xy^2|}{x^4+y^2} \\
\text{kolmioepäyhtälö} \qquad &\leq \frac{|x^4y|+|xy^2|}{x^4+y^2} \\
&= \frac{x^4|y|+|x|y^2}{x^4+y^2} \\
{\scriptstyle x^4\leq x^4+y^2,\quad y^2\leq x^4+y^2} \qquad &\leq \frac{(x^4+y^2)|y|+|x|(x^4+y^2)}{x^4+y^2} \\
(*) \qquad &= |x|+|y| \\
{\scriptstyle |x|\leq\sqrt{x^2+y^2}} \qquad &\leq 2\sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

(*) Loppu voidaan tietysti myös päätellä jo tästä tutkimalla puolittain yhtälön raja-arvoa, kun $(x,y)\to(0,0)$.

Formaalisti: Olkoot $\epsilon > 0$ ja $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \epsilon/2$. Tällöin edellisen päättelyn nojalla pätee

$$
\left|\frac{xy(x^3+y)}{x^4+y^2}-0\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
$$

Määritelmän mukaan funktiolla on tällöin origossa raja-arvo ja se on nolla. Siten funktiosta voidaan tehdä jatkuva valitsemalla $a = 0$.

K1 TEHTÄVÄ ~~J2~~ Olkoon geometrisessa avaruudessa E^3 määriteltynä reaaliarvoinen funktio

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} \neq 0,$$

missä a ja b ovat lineaarisesti riippumattomia vakiovektoreita. Tutki, onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{o}} f(\mathbf{r}).$$

Ratkaisu: Ei ole.

RATKAISU J2 Kun origoa lähestytään suoraa $t\mathbf{a}$ pitkin, raja-arvo on

$$\lim_{t\to 0} f(t\mathbf{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{a}\cdot(t\mathbf{a})}{\mathbf{b}\cdot(t\mathbf{a})} = \lim_{t\to 0} \frac{t\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}{t\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}.$$

Jos taas lähestytään suoraa $t\mathbf{b}$ pitkin, saadaan samanlaisella laskulla

$$\lim_{t\to 0} f(t\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}.$$

Nämä raja-arvot ovat samat vain jos

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2,$$

mikä pätee ainoastaan, jos vektorit ovat lineaarisesti riippuvia. Koska oletettiin, että vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, saadaan eri raja-arvot lähestyttäessä eri suunnista ja näin ollen raja-arvoa $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{o}} f(\mathbf{r})$ ei ole olemassa.

K2

(c) $$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\sin\theta\cos\theta$$

Valitaan $f(0,0) = 0$

(d) $$\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - 1}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)(1+y^2) - 1}{(x^2+y^2)\left(\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + 1\right)}$$

$$= \frac{x^2+y^2+x^2y^2}{(\quad)(\quad)} \longrightarrow \frac{1}{2}, \text{ kun } (x,y) \to (0,0)$$

(e) $$\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = *$$

$$e^x \approx 1+x \implies x \approx \ln(1+x)$$

origon ympäristössä

$$\implies * = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 \text{ rajalla.}$$