Viikko 3 Loppuviikko

M1 $f(x,y) = xy + x^2$; $p = (2,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_p = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_p = 2$$

M2 $f(x,y) = y^2 + x^2$

Neljä kpl : $f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{12} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$

$f_{21} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$, $f_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$f_1 = 2$, $f_{12} = 0$
$f_{22} = 2$, $f_{21} = 0$

Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Malliratkaisut, Viikko 3, 2020

Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Määritä se pinnan $\mathbf{r}(u,v) = (u+v)\mathbf{i} + (u^2+v^2)\mathbf{j} + (u^3+v^3)\mathbf{k}$ piste, jossa tangenttitaso on tason $9x + 3y - z = 0$ suuntainen. Mikä on tangenttitason yhtälö?

Ratkaisu: $(2, 10, 26)$, $9x + 3y - z = 22$.

RATKAISU

- Idea: Pinnan tangenttitaso on annetun tason suuntainen pisteissä, joissa pinnan (tangenttitason) ja tason normaalit ovat yhdensuuntaisia.

  Pinnan kaksi tangenttivektoria saadaan osittaisderivaatoista

  $$\mathbf{r}_u(u,v) = \mathbf{i} + 2u\mathbf{j} + 3u^2\mathbf{k}$$

  ja

  $$\mathbf{r}_v(u,v) = \mathbf{i} + 2v\mathbf{j} + 3v^3\mathbf{k}.$$

  Näistä voidaan määrittää pinnalle normaalivektori

  $$\mathbf{N}_1 = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 6uv(v-u)\mathbf{i} + 3(u-v)(u+v)\mathbf{j} + 2(v-u)\mathbf{k}$$

  Toisaalta tarvitaan myös tason $9x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow z = f(x,y) = 9x + 3y$ normaalivektoria:

  $$\mathbf{N}_2 = -f_x(x,y)\mathbf{i} - f_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k} = -9\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Normaalit ovat samansuuntaisia, kun $\mathbf{N}_1 = \lambda \mathbf{N}_2$, jollain $\lambda \neq 0$. Tästä seuraa yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 6uv(v-u) = -9\lambda \\ 3(u-v)(u+v) = -3\lambda \\ 2(v-u) = \lambda \end{cases}$$

Yhtälöryhmän viimeisestä yhtälöstä seuraa $v - u = \lambda/2$ ja sijoittamalla tämä ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$6uv(v-u) = 3uv\lambda = -9\lambda \Leftrightarrow uv = -3.$$

Vastaavasti myös toisesta yhtälöstä voidaan nyt eliminioida λ, sillä

$$3(u-v)(u+v) = -3(v-u)(u+v) = -\frac{3\lambda}{2}(u+v) = -3\lambda \Leftrightarrow u+v = 2.$$

Parametrien u ja v täytyy näin ollen toteuttaa yhtälöt

$$uv = -3 \quad \text{ja} \quad u+v = 2.$$

Tällä yhtälöparilla on ratkaisut $(u,v) = (3,-1)$ ja $(u,v) = (-1,3)$. Näillä parametrien arvoilla saadaan

$$\mathbf{r}(3,-1) = \mathbf{r}(-1,3) = 2\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} + 26\,\mathbf{k},$$

joten pinnan tangenttitaso on tason $9x + 3y - z = 0$ suuntainen pisteessä $(2, 10, 26)$.

- Pinnan normaalivektori pisteessä $(2, 10, 26)$ on

$$\mathbf{N}_1 = 72\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 8\mathbf{k} = 8(9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

ja tangenttitason yhtälö on muotoa

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_1 = 0,$$

joten saadaan

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_1 &= ((x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 26\mathbf{k})) \cdot 8(9\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= 8\big(9(x-2) + 3(y-10) - (z-26)\big) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & 9(x-2) + 3(y-10) - (z-26) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & 9x + 3y - z = 22. \end{aligned}$$

TEHTÄVÄ J2 Määritä pinnan $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + v\cos u\,\mathbf{j} + \cos u\cos v\,\mathbf{k}$ pisteeseen $(0,0,1)$ asetetun tangenttitason yhtälö. Piirrä pinta.
Ratkaisu: $z = 1$.

RATKAISU Havaitaan, että piste $(0,0,1)$ on pinnalla $\mathbf{r}(0,0) = \mathbf{k}$. Kaksi tangenttivektoria pinnan pisteeseen ovat

$$\mathbf{r}_u(u,v) = \cos v\,\mathbf{i} - v\sin u\,\mathbf{j} - \sin u\cos v\,\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_u(0,0) = \mathbf{i}$$

ja

$$\mathbf{r}_v(u,v) = -u\sin v\,\mathbf{i} + \cos u\,\mathbf{j} - \cos u\sin v\,\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}_v(0,0) = \mathbf{j}.$$

Selvästi pinnan normaalivektori kyseiseen pisteeseen on tällöin $\mathbf{N} = \mathbf{k}$. Tangenttitaso voidaan määrittää yhtälöstä

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0,$$

kun valitaan lisäksi $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{k}$.[1] Saadaan

$$((x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = z - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1$$

[1] $\mathbf{r}_0$ on siis pisteen $(0,0,1)$ paikkavektori.

K1 $\quad \underline{r}(u,v) = u(1+v)\,\underline{i} + u^2(1-v)\,\underline{j} + u^3 v\,\underline{k}$

$p = (1,1,0) \quad \Longrightarrow \quad$ pinnalla $\quad \underline{i} + \underline{j} = \underline{r}(1,0)$

$$\underline{r}_u(u,v) = (1+v)\,\underline{i} + 2u(1-v)\,\underline{j} + 3u^2 v\,\underline{k}$$
$$\underline{r}_v(u,v) = u\,\underline{i} - u^2\,\underline{j} + u^3\,\underline{k}$$

$$\underline{n} = \underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v)$$

$$= \underline{r}_u(1,0) \times \underline{r}_v(1,0)$$

$$= (\underline{i} + 2\underline{j} + 0\underline{k}) \times (\underline{i} - \underline{j} + \underline{k})$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\underline{i} - \underline{j} - 3\underline{k}$$

$$\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0) = 0 \quad ; \quad \underline{r}_0 = \underline{i} + \underline{j}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x - y - 3z = 1$$

K2 Pinta $z = x^2 + y^2$

suora $x = y = z$

Leikkauspiste $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \neq (0,0,0)$

Suoraan: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

Eli:

$$0 = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \left(y - 1/2\right) - \left(z - \frac{1}{2}\right)$$

$$\iff \quad x + y - z = \frac{1}{2}$$

Haaste

Kertausta differentiaaliyhtälöistä: Laplace-yhtälön $\Delta u = 0$ radiaalinen eli säteittäinen muoto n-ulotteisessa avaruudessa on

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0.$$

(Tulkinta: $u(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = f(r)$, kun $n = 3$ jne. Tähän palataan myöhemmin.)
Määritä kaikki radiaaliset ratkaisut $f(r)$, kun
a) $n = 3$;
b) $n = 2$.
Vihjeitä: a-kohta: Kerro puolittain lausekkeella r^2, jolloin saadaan Euler-tyyppinen DY: siihen yrite $f(r) = r^\lambda$.
b-kohta (kertaluvun pudotus): Merkitse $v(r) = f'(r)$, jolloin $v'(r) = f''(r)$ ja saadaan separoituva (ja myös lineaarinen) 1. kertaluvun DY funktiolle $v(r)$. Lopuksi $f(r)$ integroimalla $v(r)$.

RATKAISU

a) Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella r^2:

$$\begin{aligned} & r^2 \left(f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) \right) = r^2 \cdot 0 \\ \Rightarrow \quad & r^2 f''(r) + 2r f'(r) = 0. \end{aligned}$$

Sijoitetaan yrite $f(r) = r^\lambda$:

$$\lambda(\lambda - 1) r^\lambda + 2\lambda r^\lambda = r^\lambda \lambda(\lambda + 1) = 0.$$

Koska $r^\lambda \neq 0$ kaikilla λ seuraa tästä $\lambda = 0$ tai $\lambda = -1$. Näin ollen kaikki radiaaliset ratkaisut ovat muotoa

$$f(r) = c_1 r^0 + c_2 r^{-1} = c_1 + \frac{c_2}{r}.$$

b) Merkitään $v(r) = f'(r)$. Tällöin

$$\begin{aligned} & f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = v'(r) + \frac{1}{r} v(r) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{1}{r} \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dr}{r} \\ \Rightarrow \quad & \ln |v| = -\ln |r| + c \\ \Rightarrow \quad & v(r) = \pm e^c r^{-1} = \frac{c_1}{r}. \end{aligned}$$

Edelleen

$$
\begin{aligned}
& v(r) = f'(r) = \frac{c_1}{r} \\
\Rightarrow \quad & f(r) = \int \frac{c_1}{r}\, dr = c_1 \ln r + c_2.
\end{aligned}
$$