VIIKKO 4 AV

M1

(a) $w = f(x,y,z) = xy + yz + zx$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$x = e^t \quad ; \quad x' = e^t$$

$$y = 2t^2 \quad ; \quad y' = 4t$$

$$z = e^{-t} \quad ; \quad z' = -e^{-t}$$

$$\frac{dw}{dt} = (y+z)\frac{dx}{dt} + (x+z)\frac{dy}{dt} + (x+y)\frac{dz}{dt}$$

$$= (2t^2 + e^{-t})e^t + (e^t + e^{-t})4t + (e^t + 2t^2)(-e^{-t})$$

$$= 2e^{-t}t\left(2 - t + e^{2t}(2+t)\right)$$

(b) $w = f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$x = 2t \quad ; \quad x' = 2$

$y = t^2 \quad ; \quad y' = 2t$

$$\frac{dw}{dt} = \left(-\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2y}{(x^2+y^2)} \right)\frac{dx}{dt}$$

$$+ \left(-\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2x}{(x^2+y^2)} \right)\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{2(t^2-4)}{(t^2+4)^2} \cdot 2 - \frac{4}{t}\frac{(t^2-4)}{(t^2+4)^2} \cdot 2t$$

$$= -\frac{4(t^2-4)}{(t^2+4)^2}$$

M2 $h(x,y) = f(x\,g(y))$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = g(y)\,f'(x\,g(y))$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = x\,g'(y)\,f'(x\,g(y))$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = g(y)^2\,f''(x\,g(y))$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y\,\partial x} = g'(y)\,f'(x\,g(y)) + x\,g'(y)\,g(y)\,f''(x\,g(y))$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = x\,g''(y)\,f'(x\,g(y)) + x^2\,g'(y)^2\,f''(x\,g(y))$$

Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)
MS-A0201
Hakula/Karjalainen
Harjoitukset, Viikko 4, 2020

H

Tehtävätyypeistä: Johdantotehtävät ovat perustehtäviä, jotka tehdään harjoituksissa. Johdantotehtävien jälkeen opiskelija on valmis ongelmanratkaisuun harjoituksen aihepiirissä. Varsinaiset tehtävät tarkastetaan vertaisarviointina seuraavalla harjoituskierroksella ellei toisin mainita.

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske ketjusääntöä käyttäen $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ ja $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, kun

a) $w = x\ln(x^2+y^2), \quad x = s+t,\ y = s-t,$
b) $w = e^{x+2y}\sin(2x-y), \quad x = s^2+2t^2,\ y = 2s^2-t^2.$

RATKAISU

a) Lasketaan aluksi funktion $w(x,y) = w(x(s,t), y(s,t))$ osittaisderivaatat:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = \ln(2(s^2+t^2)) + \frac{(s+t)^2}{s^2+t^2}$$

ja

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2}.$$

Soveltamalla ketjusääntöä saadaan nyt

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial s}}_{=1} + \frac{\partial w}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial s}}_{=1} \\ &= \ln(2(s^2+t^2)) + \frac{(s+t)^2}{s^2+t^2} + \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2} \\ &= \ln(2(s^2+t^2)) + \frac{2s(s+t)}{s^2+t^2}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{=1} + \frac{\partial w}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{=-1} \\ &= \ln(2(s^2+t^2)) + \frac{(s+t)^2}{s^2+t^2} - \frac{s^2-t^2}{s^2+t^2} \\ &= \ln(2(s^2+t^2)) + \frac{2t(s+t)}{s^2+t^2}.\end{aligned}$$

b) Funktion $w(x,y) = w(x(s,t), y(s,t))$ osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= e^{x+2y}(\sin(2x-y) + 2\cos(2x-y)) \\ &= e^{5s^2}(\sin(5t^2) + 2\cos(5t^2))\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= e^{x+2y}(2\sin(2x-y) - \cos(2x-y)) \\ &= e^{5s^2}(2\sin(5t^2) - \cos(5t^2)),\end{aligned}$$

joten ketjusääntöä soveltamalla tästä seuraa

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= e^{5s^2}(\sin(5t^2) + 2\cos(5t^2)) \cdot 2s \\ &\quad + e^{5s^2}(2\sin(5t^2) - \cos(5t^2)) \cdot 4s \\ &= 10se^{5s^2}\sin(5t^2)\end{aligned}$$

ja

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= e^{5s^2}(\sin(5t^2) + 2\cos(5t^2)) \cdot 4t \\
&\quad + e^{5s^2}(2\sin(5t^2) - \cos(5t^2)) \cdot (-2t) \\
&= 10te^{5s^2}\cos(5t^2).
\end{aligned}
$$

TEHTÄVÄ J2 Approksimoi linearisoimalla funktion

$$f(x,y) = \sin(\pi xy + \ln y)$$

arvo pisteessä $(0.01, 0.15)$.

RATKAISU Funktio ei ole origossa edes jatkuva, joten se ei myöskään ole siellä differentioituva. Näin ollen funktion lineaariapproksimaation laskeminen ei ole mielekästä origon ympäristössä.

Funktion epäjatkuvuus origossa on ilmeistä, kun tarkastellaan raja-arvoja suoralla $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\,\mathbf{j}$, kun $t \to \infty$.

K1 $u(x,y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - \cos x\, f'(\sin y - \sin x)$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \cos y\, f'(\sin y - \sin x)$$

$$u_y \cos x + u_x \cos y = \cos x \cos y$$

K2 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $u(x,y,z) = \frac{1}{r}$

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \implies \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

Vastaavasti

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Nyt $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{x}{r} = \frac{3x^2 - r^2}{r^5}$$

Taas vastaavasti: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{3y^2 - r^2}{r^5}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3z^2 - r^2}{r^5}$$

Eli : $$\frac{3(x^2+y^2+z^2) - 3r^2}{r^5} = 0 ,$$ kun

$r \neq 0$