

VIKKO 4 LV

M1 f on vektoriarvoisen, tällöin myös differentiaali on vektori.

$$\underline{f}(x, y, z) = x^2 + yz \underline{i} + 2ze^x \underline{j} + x \ln y \underline{k}$$

$$\underline{J}_f = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ 2ze^x & 0 & 2e^x \\ \ln y & \frac{x}{y} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{J}_f \Big|_{(0, 1, -2)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$d\underline{f} = A \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} = -0.1 \underline{i} - 0.2 \underline{j}$$

Tässä on heikkaimmalla vaihdettu \mathbb{R}^3 :n pisteitä E^3 :n vektoreiksi.

$$M2 \quad f(x,y) = 2x - y^2$$

$$\nabla f = 2 \underline{i} - 2y \underline{j}$$

$$\text{Origossa : } \nabla f|_{(0,0)} = 2 \underline{i}$$

$$\text{Suunnella derivaatta : } 2 \underline{i} \cdot (\cos \theta \underline{i} + \sin \theta \underline{j}) = 0,$$

$$\text{kun } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ tai } \frac{3\pi}{2}$$



Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (TFM)

MS-A0201

Hakula/Karjalainen

Malliratkaisut, Viikko 4, 2020



Loppuviikko

TEHTÄVÄ J1 Laske seuraavien funktioiden suunnatut derivaatat annettuihin suuntiin annetuissa pisteissä:

- a) $f(x, y) = e^{x+y}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $(0, 0)$,
- b) $f(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y^2)$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $(1, 2)$,
- c) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $(-3, 2, 1)$,
- d) $f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$, $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $(3, -1, 4)$.

Ratkaisu: a) $\sqrt{2}$; b) $-\pi/\sqrt{5}$; c) $-60/7$; d) $155/\sqrt{6}$.

RATKAISUT Funktion f suunnattu derivaatta vektorin \mathbf{u} suuntaan pisteessä \mathbf{x}_0 on muotoa

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

a) Nyt $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Tällöin funktion f gradientiksi saadaan

$$\nabla f(x, y) = e^{x+y} \mathbf{i} + e^{x+y} \mathbf{j} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Lisäksi

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}.$$

Siten suunnattu derivaatta haluttuun suuntaan on

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

b) Nyt $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$. Gradientti:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y^2) \mathbf{i} - 2y\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y^2) \mathbf{j} \\ \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) &= \pi \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \underbrace{\cos(4\pi)}_{=1} \mathbf{i} - 4\pi \cos(\pi) \underbrace{\sin(4\pi)}_{=0} = -\pi \mathbf{i},\end{aligned}$$

ja suuntavektorin normi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}.$$

Siten kysytty derivaatta on

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (-\pi \mathbf{i}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = -\frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

c) Tässä $\mathbf{x}_0 = (-3, 2, 1)$. Gradientti:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k} \\ \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) &= 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 36\mathbf{k}\end{aligned}$$

ja suuntavektorin normi:

$$\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{49} = 7.$$

Siten

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 36\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{7}(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{60}{7}.$$

d) Tässä $\mathbf{x}_0 = (3, -1, 4)$. Gradientti:

$$\nabla f(x, y) = y^2 \mathbf{i} + (2xy + z^3) \mathbf{j} + 3yz^2 \mathbf{k} \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 48\mathbf{k}.$$

Suuntavektorin normi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}.$$

Tällöin suunnatuksi derivaataksi saadaan

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{i} + 58\mathbf{j} - 48\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{155}{\sqrt{6}}.$$

TEHTÄVÄ J2 Laske kohdassa a) vektorimuuttujan vektoriarvoisen funktion Jacobin matriisi ja kohdassa b) Taylorin polynomi

$$\text{a) } f(x, y, z) = (xe^{-yz}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y}, \sqrt{xz^2}),$$

$$\text{b) } f(x, y) = 2x^4 - 5y^3 + 2xy^2, \text{ keskus} = (0, 0), \text{ aste} = 3.$$

Ratkaisu: a) $\begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -y/x^2 & 1/x - z/y^2 & 1/y \\ z^2/(2\sqrt{x}) & 0 & 2\sqrt{xz} \end{pmatrix}$; b) $2xy^2 - 5y^3$.

RATKAISUT

a) Vektoriarvoisen funktion $f \in \mathbb{R}^3$ Jacobin matriisi on muotoa

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 & \partial_z f_3 \end{pmatrix},$$

joten laskemalla kaikki matriisin alkiot (osittaisderivaatat jokaiselle funktion f komponentille) saadaan

$$Df(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^{-yz} & -xze^{-yz} & -xye^{-yz} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} & \frac{1}{y} \\ \frac{z^2}{2\sqrt{x}} & 0 & 2\sqrt{xz} \end{pmatrix}.$$

b) Lasketaan tarvittavat osittaisderivaatat:

$$f_x(x, y) = 8x^3 + 2y^2$$

$$f_y(x, y) = -15y^2 + 4xy$$

$$f_{xx}(x, y) = 24x^2$$

$$f_{yy}(x, y) = -30y + 4x$$

$$f_{xy}(x, y) = 4y$$

$$f_{xxy}(x, y) = 0$$

$$f_{xyy}(x, y) = 4$$

$$f_{xxx}(x, y) = 48x$$

$$f_{yyy}(x, y) = -30.$$

Kun $(x, y) = 0$ saadaan näistä

$$f_x(0, 0) = 0$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xxy}(0, 0) = 0$$

$$f_{xyy}(0, 0) = 4$$

$$f_{xxx}(0, 0) = 0$$

$$f_{yyy}(0, 0) = -30.$$

Onneksi löytyi paljon nolliä! Funktion f 3. asteen Taylorin polynomiksi kehityskeskukseksi $(0, 0) = \mathbf{0}$ saadaan nyt

$$\begin{aligned}
 f(h, k) &\approx f(\mathbf{0}) + \mathbf{h} \cdot \nabla f(\mathbf{0}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{0}) + \frac{1}{3!} (\mathbf{h} \cdot \nabla)^3 f(\mathbf{0}) \\
 &= \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + (h \underbrace{f_x(0, 0)}_{=0} + k \underbrace{f_y(0, 0)}_{=0}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (h^2 \underbrace{f_{xx}(0, 0)}_0 + 2hk \underbrace{f_{xy}(0, 0)}_{=0} + k^2 \underbrace{f_{yy}(0, 0)}_{=0}) \\
 &\quad + \frac{1}{6} (h^3 \underbrace{f_{xxx}(0, 0)}_{=0} + 3h^2k \underbrace{f_{xxy}(0, 0)}_{=0} + 3hk^2 \underbrace{f_{xyy}(0, 0)}_{=4} + k^3 \underbrace{f_{yyy}(0, 0)}_{=-30}) \\
 &= \frac{1}{6} (12hk^2 - 30k^3) = 2hk^2 - 5k^3
 \end{aligned}$$

tai

$$f(x, y) \approx 2xy^2 - 5y^3.$$

$$K1 \quad f(x, y, z) = xy + \cos x + y^2 z$$

$$\nabla f = (y - \sin x) \underline{i} + (x + 2yz) \underline{j} + y^2 \underline{k}$$

yz -tason normaali $\underline{n} = \underline{i}$ eli jotta gradientti olisi yz -tason suuntainen on oltava $\underline{n} \cdot \nabla f = 0$.

Seuraa suoraan, että kaikilla z $y = \sin x$ ovat kysytyt pisteet.

$$K2 \quad f(x, y, z) = xy^2 + yz^3$$

$$\nabla f = y^2 \underline{i} + (2xy + z^3) \underline{j} + 3yz^2 \underline{k}$$

$$\underline{u} = \nabla f \Big|_{(3, -1, 4)} = \underline{i} + 58 \underline{j} - 48 \underline{k}$$

$\|\underline{u}\| = \sqrt{5669}$ on derivaatta nopeimman kasvun suuntaan

(a) gradientin suuntaan

(b) kohtisuoraan gradienttia vastaan

$$\begin{aligned} \text{Tässä siis taso: } & (3\underline{i} - \underline{j} + 4\underline{k} + t \nabla f) \cdot \\ (\underline{x} \underline{i} + \underline{y} \underline{j} + \underline{z} \underline{k}) &= (3+t)x + (-1+58t)y + (4-48t)z \\ &= 0 \end{aligned}$$