VIIKKO 5 AV

M1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $p(A) = |A - \lambda I| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 2$ (tuurilla)

$\Longrightarrow \lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$; $p(A) = -(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$

$\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$

b) $|A_{11}| = 2$

$|A_{22}| = 3$

$|A_{33}| = 4$ $A_{ii} > 0$, $i = 1, 2, 3$

M2 $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y$

Napakoordinaateissa:

$$f(x,y) = r\left[r(1 + \cos\theta \sin\theta) + \cos\theta - \sin\theta \right]$$

Nyt $f(-1,1) = -1$ suhteellinen minimi.

Idea: Osoitetaan, että $f > 0$ sopivan kiekon reunalla (ja ulkopuolella).

Tunnetut epäyhtälöt: kaikille θ

$$|\cos\theta \sin\theta| \leq \frac{1}{2}$$

$$|\cos\theta - \sin\theta| \leq \sqrt{2}$$ (maksimi, kun $\theta = -\pi/4$)

Valitaan $r \geq 3 \Rightarrow f(x,y) \geq 3\left[3\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{2}\right] > 0$

r-säteisen kiekon reunalla $f > 0$, sisäpisteessä $f = -1$. $f > 0$ myös kiekon ulkopuolella

$$\Rightarrow \min_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = -1$$

Alkuviikko

TEHTÄVÄ J1 Etsi seuraaville funktioille f ne pisteet, joissa $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$, ja tutki lokaalin ääriarvon esiintymistä:

a) $y^4 + x^2 - 2xy$, b) $x^3 + xy + y^2 - 3x - 9y$, c) $x^4 + y^4 + 4xy - 2y^2$.

RATKAISU

a) Gradientin
$$\nabla f(x, y) = (2x - 2y, 4y^3 - 2x)$$
nollakohdat eli funktion kriittiset pisteet saadaan yhtälöparista
$$\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x = 0. \end{cases}$$
Ensimmäisestä yhtälöstä seuraa $y = x$ ja sijoittamalla tämä jälkimmäiseen yhtälöön saadaan $x(2x^2 - 1) = 0$, eli $x = 0$ tai $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Gradientilla on siten kolme nollakohtaa: $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ ja $(0, 0)$.

Tutkitaan sitten Hessen matriisin
$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 \end{pmatrix}$$
ominaisarvoja funktion kriittisissä pisteissä.

- Kun $(x,y)=(0,0)$ saadaan

$$\det(\mathbf{H}_f(0,0)-\lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda)-(-2)(-2)$$
$$= \lambda^2-2\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda_\pm = 1\pm\sqrt{5}.$$

  Koska $\lambda_+>0$ ja $\lambda_-<0$ on Hessen matriisi origossa indefiniitti ja kyseessä on tällöin funktion satulapiste.

- Kahdessa muussa pisteessä Hessen matriisin ominaisarvoiksi saadaan

$$\det\big(\mathbf{H}_f(\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}})-\lambda\mathbf{I}\big) = \lambda^2-8\lambda+8=0 \Rightarrow \lambda_\pm = 4\pm2\sqrt{2}.$$

  Koska kumpikin ominaisarvoista on positiivinen, on Hessen matriisi kyseisissä pisteissä positiividefiniitti ja tällöin funktiolla on näissä pisteissä lokaali minimi.

- Osoittautuu, ettei gradientilla

$$\nabla f(x,y) = (3x^2+y-3, 2y+x-9)$$

ole reaalisia nollakohtia, mistä päättelemme, ettei funktiolla ole myöskään lokaaleja ääriarvoja reaalitasossa.

- Gradientin

$$\nabla f(x,y) = (4x^3+4y, 4y^3+4x-4y)$$

nollakohdat ovat $(x,y)\approx(-1.10,1.35)$, $(x,y)\approx(1.10,-1.35)$ ja $(x,y)=(0,0)$.[1]

Tutkitaan taas Hessen matriisin

$$\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

ominaisarvoja kriittisissä pisteissä.

- Kun $(x,y)=(0,0)$, niin

$$\det(\mathbf{H}_f(0,0)-\lambda\mathbf{I}) = \lambda^2+4\lambda-16=0$$
$$\Rightarrow \lambda=-2(1+\sqrt{5})<0 \quad \text{tai} \quad \lambda=2(\sqrt{5}-1)>0,$$

  joten kyseessä on funktion satulapiste.

[1] Yhtälöparista seuraa kahdeksannen asteen polynomiyhtälö, joten nollakohdat on terveellisintä selvittää laskimella/vapaavalintaisella matematiikkaohjelmistolla.

- Havaitaan, että kahden muun kriittisen pisteen tapauksessa Hessen matriisi on identtinen, joten valinnalla ei ole merkitystä. Saadaan

  $$\det(\mathbf{H}_f(-1.10, 1.35) - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda \approx 12 > 0 \text{ tai } \lambda \approx 21 > 0.$$

  Siten Hessen matriisi on positiividefiniitti ja funktiolla on näissä pisteissä lokaali minimi.

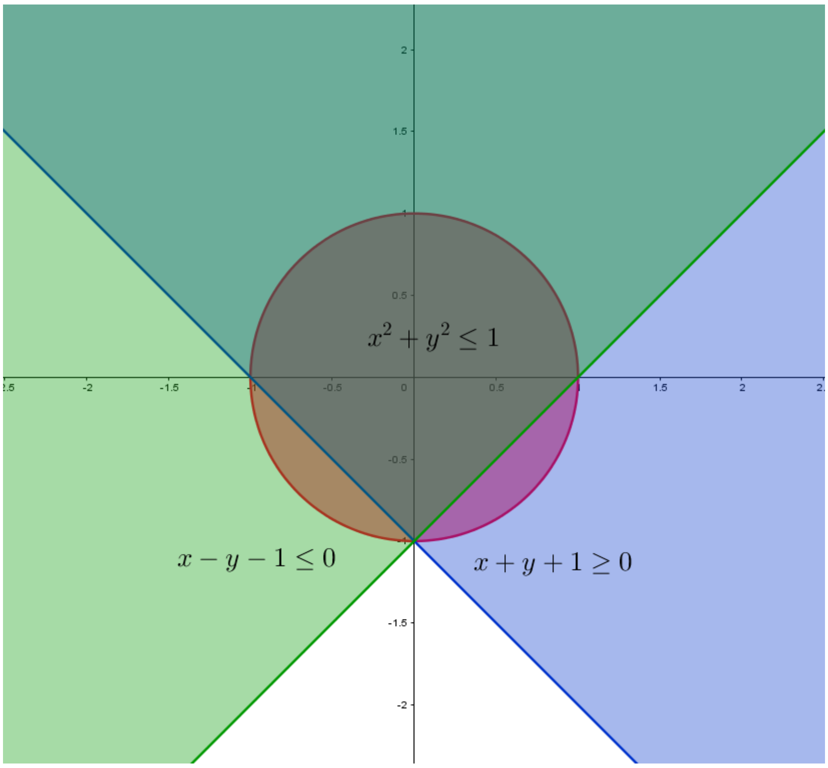
TEHTÄVÄ J2 Etsi seuraavien funktioiden maksimi ja minimi annetussa joukossa:

a) $xy + x - y$, $\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x + y + 1 \ge 0,\ x - y - 1 \le 0 \}$;
b) $x^2 - 2y^2 - xy - x$, $\{ (x, y) \mid x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1 \}$;
c) $3 + x - x^2 - y^2$, $\{ (x, y) \mid 2x^2 + y^2 \le 1 \}$.

Ratkaisu: a) $1, -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$; b) $\frac{17}{8}, -4$; c) $\frac{13}{4}$.

RATKAISU

a) Merkitään $f(x) = xy + x - y$.



Kuva 1: $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x + y + 1 \ge 0, x - y - 1 \le 0\}$

Funktion f gradientilla

$$\nabla f(x, y) = (y + 1, x - 1)$$

on nollakohta $(x, y) = (1, -1)$, mutta tämä ei kuulu tarkasteltavaan joukkoon, sillä $1^2 + (-1)^2 = 2 > 1$.

Tutkitaan sitten funktion arvoja suljetun joukon reunoilla. Täytyy tarkastella kolmea tapausta:

- Suoralla $x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1$ saadaan

  $$\varphi_1(x) = f(x, -x-1) = x(-x-1) + x - (-x-1) = -x^2 + x + 1$$

  ja edelleen derivaatalle nollakohta

  $$\varphi_1'(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

  Piste $(x, y) = (1/2, -3/2)$ ei kuitenkaan kuulu tarkasteltavaan joukkoon, sillä $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} > 1$.
- Vastaavasti suoralla $x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$ saadaan

  $$\varphi_2(x) = f(x, x-1) = x(x-1) + x - (x-1) = x^2 - x + 1$$

  ja derivaatalle nollakohta

  $$\varphi_2'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

  Havaitaan, että piste $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ toteuttaa kaikki tarkasteltavan joukon ehdot.
- Ympyrän kaarella $x^2 + y^2 = 1$ voidaan käyttää napakoordinaatteja $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$, missä $0 \le \theta < 2\pi$. Tällöin

  $$\varphi_3(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\sin\theta + \cos\theta - \sin\theta.$$

  Etsitään derivaatan nollakohdat:

  $$\begin{aligned} \varphi_3'(\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta - \cos\theta = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 - y^2 - y - x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x+y)(x-y-1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad y = -x \quad \text{tai} \quad y = x - 1. \end{aligned}$$

  Tapauksesta $y = -x$ seuraa

  $$x^2 + y^2 = 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}})$$

ja jos $y = x - 1$, niin

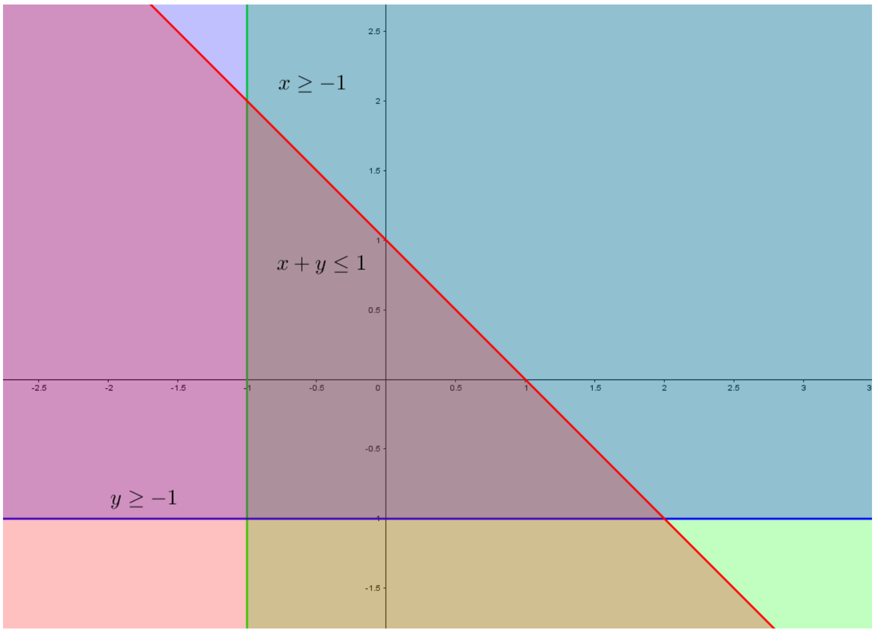
$$x^2 + y^2 = x^2 + (x-1)^2 = 2x(x-1) + 1 = 1 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{tai } x = 1,$$

jolloin $(x, y) = (0, 1)$ tai $(x, y) = (0, 1)$. Havaitaan, että näistä neljästä pisteestä $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ on ainoa, joka ei kuulu tarkasteltavaan joukkoon.

Edellä löydettyjen pisteiden $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1, 0)$ ja $(0, 1)$ lisäksi funktion ääriarvot voivat myös sijaita käyrien leikkauspisteissä $(1, 0)$,$(-1, 0)$ ja $(0, -1)$. Vertailemalla funktion arvoja näissä pisteissä havaitaan, että maksimi annetussa joukossa on $f(0, -1) = f(1, 0) = 1$ ja minimi $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2} - \sqrt{2}$.

b) Merkitään $g(x, y) = x^2 - 2y^2 - xy - x$.



Kuva 2: $\{(x, y) \mid x \geq -1, y \geq -1, x + y \geq 1\}$

Gradientille

$$\nabla g(x, y) = (2x - y - 1, -4y - x)$$

löydetään nollakohta $(x, y) = (\frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$, joka täyttää annetun joukon ehdot. Tarkastellaan sitten funktion käyttäytymistä joukon reunoilla:

- Suoralla $x = -1$ saadaan

  $$\varphi_1(y) = g(-1, y) = -2y^2 + y + 2$$

  ja derivaatalle nollakohta

  $$\varphi_1'(y) = -4y + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4},$$

  joten eräs tarkasteltava piste on $(x, y) = (-1, \frac{1}{4})$.
- Vastaavasti, kun $y = -1$, saadaan

  $$\varphi_2(x) = g(x, -1) = x^2 - 2$$

  ja tämän derivaatalle nollakohta

  $$\varphi_2'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

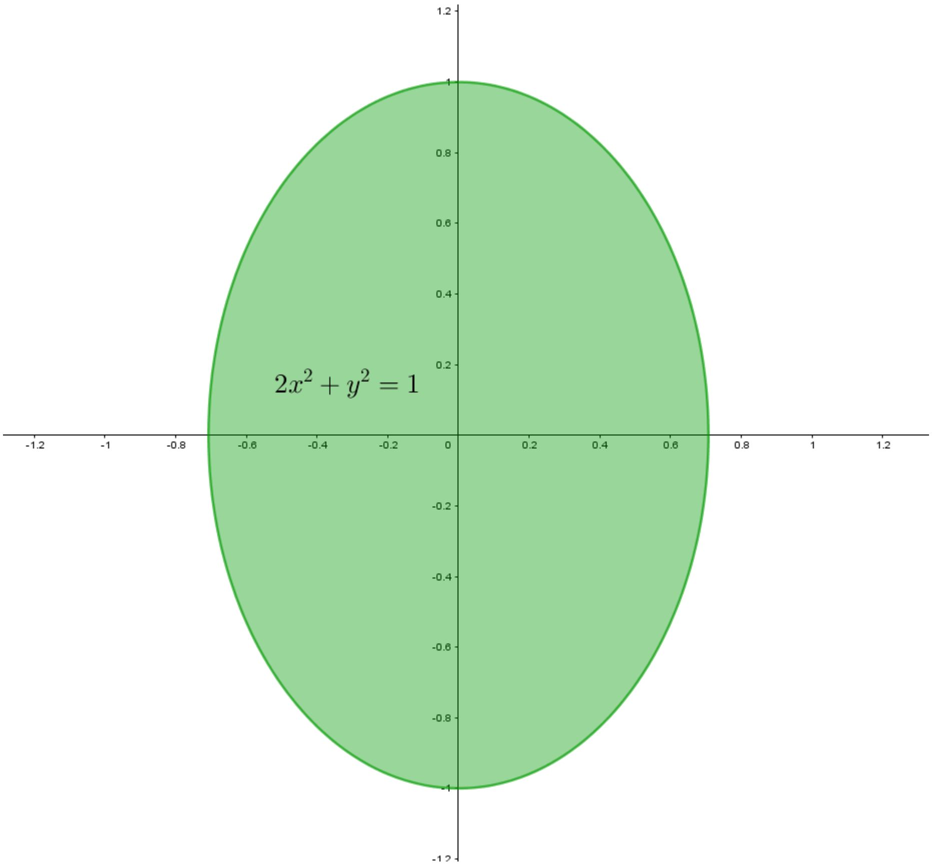
  Siten toinen tarkasteltava piste on $(x, y) = (0, -1)$, joka myöskin löytyy tarkasteltavasta joukosta.
- Viimeisellä suoralla $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$ havaitaan, että funktion

  $$\varphi_3(x) = g(x, 1 - x) = x^2 - 2(1 - x)^2 - x(1 - x) - x = 2(x - 1)$$

  derivaatalla $\varphi_3'(x) = 2$ ei ole tarkasteltavia nollakohtia.

Edellä löydettyjen pisteiden $(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$, $(-1, \frac{1}{4})$ ja $(0, -1)$ lisäksi funktion ääriarvoja voi taas esiintyä myös käyrien leikkauspisteissä, eli pisteissä $(-1, -1)$, $(2, -1)$ ja $(-1, 2)$. Laskemalla funktion arvot näissä kuudessa pisteessä osoittautuu, että funktion maksimi on $g(-1, \frac{1}{4}) = \frac{17}{8}$ ja minimi $g(-1, 2) = -4$.

c) Merkitään $h(x, y) = 3 + x - x^2 - y^2$.



Kuva 3: $\{(x, y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 1\}$

Gradientin

$$\nabla h(x, y) = (1 - 2x, 2y)$$

nollakohta on $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$, joka selvästi kuuluu annettuun joukkoon.

Seuraavaksi havaitaan, että joukon reuna $2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2$ on ellipsi, jolla on parametrisointi $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \sin \theta)$, missä $0 \leq \theta < 2\pi$.[2] Tällöin käyrällä

$$\varphi(\theta) = h\big(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \sin \theta\big) = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{2} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta.$$

[2] Ellipsin $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ parametrisointi on $(x, y) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$

Etsitään derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta - 3\sin\theta\cos\theta = 0\\ \Rightarrow\quad &-\sin\theta\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\Big) = 0\\ \Rightarrow\quad &-y\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}x\Big) = 0\\ \Rightarrow\quad &y = 0 \quad \textbf{tai} \quad x = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Jos $y = 0$, niin $2x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja vastaavasti, jos $x = -\frac{1}{2}$, niin $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Funktion ääriarvot löytyvät siis pisteiden $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ja $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ joukosta. Laskemalla funktion arvot jokaisessa viidestä pisteessä voidaan todeta, että funktion maksimi annetussa joukossa on $h(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{13}{4}$ ja minimi $h(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = h(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{4}$.

K1 $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$

$\nabla f = 0 \iff$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2z = 0 \quad (1)$$

(1) $z = -\frac{y^2}{2}$

(2) $\Rightarrow y^3 = x^2$

(3) $\Rightarrow y^{5/2} = 1 \Rightarrow y = 1$

(1) $\Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

(3) $\Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = 1$

kp $(1, 1, -\frac{1}{2})$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$; sekaderivaatat kp:ssä

Sylvester: $2 > 0$, $-6 < 0$, $-20 < 0$

$\Rightarrow$ indefiniitti $\Rightarrow$ kp on satulapiste

Ominaisarvot: $|H - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 8\lambda - 20$

$$= -(\lambda - 2)(\lambda^2 - \lambda + 10)$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_{2,3} &= \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{41}) \end{aligned}\right\} \text{ indefiniitti}$$

K2 $\quad f(x,y) = y^2 - 4x^2y + 3x^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -8xy + 12x^3 = 4x(3x^2 - 2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4x^2$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ on kriittinen piste.

Rajoitturnat origon kautta kulkeville suorille:

$$g(x) = f(x, kx) = k^2x^2 - 4kx^3 + 3x^4$$

$$g'(x) = 2k^2x - 12kx^2 + 12x^3$$

$$g''(x) = 2k^2 - 24kx + 36x^2$$

Siis: $g'(0) = 0$, $g''(0) = 2k^2 > 0 \quad (k \neq 0)$

$\Rightarrow$ g:llä on suhteellinen minimi, kun $x = 0$

eli $f(x, kx)$:lläkin on !

Akselit: $f(0,y) = y^2$; $f(x,0) = 3x^4$

$\Rightarrow$ YLä lokaalit minimit origossa ...

Riittää yksi vastaesimerkki :

Etsitään käyrä, jolla on lokaali maksimi origossa eli esim. $f(x, y(x)) = -x^n$, missä n on parillinen potenssi.

Kokeilemalla: $y = 2x^2 \Rightarrow f(x, 2x^2) = -x^4$